

Loi de Kirchhoff

D'après G. Kirchhoff, « Über den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme », *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, décembre 1859, p. 783–787.

1. Expérience de pensée

Deux plaques sont placées face à face, parallèles et *illimitées* (très grandes devant leur écartement), de sorte que toute la lumière qui quitte l'une arrive forcément sur l'autre. Chaque plaque est doublée, sur sa face extérieure, d'un miroir parfait. Rien ne peut donc s'échapper : le système est isolé, et la lumière ne peut que faire des allers-retours entre les deux plaques.

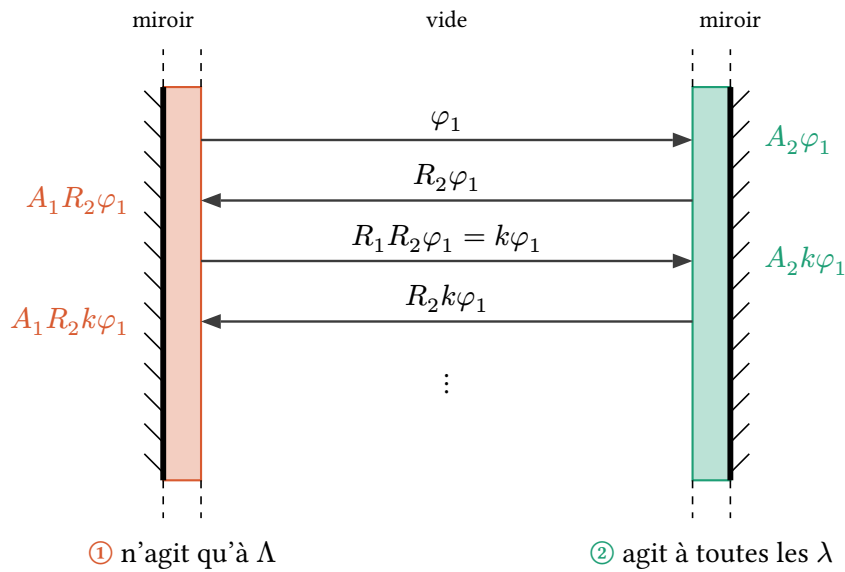


Fig. 1. – Les deux plaques et leurs miroirs. Les flèches suivent le rayonnement φ_1 émis par ① à la longueur d'onde Λ ; à côté de chaque plaque, la part absorbée à chaque passage.

2. Notations et hypothèses

Les deux plaques sont au départ à la **même température** T .

- Pour chaque plaque i et chaque longueur d'onde λ , on note $A_i(\lambda)$ la fraction de la lumière reçue qui est absorbée ($0 \leq A_i \leq 1$), et $R_i(\lambda) = 1 - A_i(\lambda)$ la fraction renvoyée vers l'autre plaque. Grâce au miroir, une plaque ne transmet rien : ce qui n'est pas absorbé est renvoyé.
- La plaque ① n'émet et n'absorbe qu'à une seule longueur d'onde Λ : $A_1(\lambda) = 0$ et $R_1(\lambda) = 1$ pour $\lambda \neq \Lambda$.
- La plaque ② émet et absorbe à toutes les longueurs d'onde : $A_2(\lambda) > 0$ pour tout λ .
- À la longueur d'onde Λ , ① émet la puissance φ_1 et ② la puissance φ_2 . En toute rigueur, ce sont des puissances par unité de surface et par petit intervalle de longueur d'onde autour de Λ .
- On note enfin $k = R_1 R_2$ la fraction de lumière qui fait un aller-retour complet sans être absorbée. Comme les plaques absorbent un peu, $0 \leq k < 1$.

3. Cas des longueurs d'onde $\lambda \neq \Lambda$

Pour ces longueurs d'onde, ① est transparente : $A_1 = 0$, $R_1 = 1$. Tout ce que ② émet traverse ①, se réfléchit sur le miroir, revient sur ②, qui en absorbe une partie, et ainsi de suite. Comme $A_2 > 0$ et que rien ne s'échappe, ② finit par réabsorber *tout* ce qu'elle a émis.

Le bilan de ② est donc automatiquement nul à ces longueurs d'onde : elle émet et ré-absorbe, mais n'échange rien avec ①. **Tout se joue à Λ .**

4. Cas de la longueur d'onde Λ

4.1. Rayonnement émis par ①

Suivons la puissance φ_1 émise par ① (figure 1). Elle arrive sur ②, qui en absorbe $A_2\varphi_1$ et renvoie $R_2\varphi_1$. De ce retour, ① absorbe $A_1R_2\varphi_1$ et renvoie $R_1R_2\varphi_1 = k\varphi_1$, dont ② absorbe $A_2k\varphi_1$. Et ainsi de suite : à chaque aller-retour, ce qui reste est multiplié par k . Au total, ② absorbe

$$A_2\varphi_1(1 + k + k^2 + \dots) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_2k^n\varphi_1 = \frac{A_2}{1-k}\varphi_1 \quad (1)$$

(somme d'une suite géométrique de raison $k < 1$).

4.2. Rayonnement émis par ②

La puissance φ_2 émise par ② arrive d'abord sur ①, qui en renvoie $R_1\varphi_2$. De ce retour, ② absorbe $R_1A_2\varphi_2$, puis $R_1A_2k\varphi_2$ au passage suivant, etc. Au total, ② réabsorbe

$$\frac{R_1A_2}{1-k}\varphi_2 \quad (2)$$

4.3. Bilan d'énergie de ②

Chaque seconde, ② perd φ_2 et gagne les deux quantités précédentes. En notant E_2 son énergie :

$$\frac{dE_2}{dt} = \frac{A_2}{1-k}\varphi_1 - \varphi_2 + \frac{R_1A_2}{1-k}\varphi_2 = \frac{A_2}{1-k}\varphi_1 - \varphi_2 \left(1 - \frac{(1-A_1)A_2}{1-k}\right) \quad (3)$$

5. Application du second principe

Les deux plaques partent à la même température T . Si $\frac{dE_2}{dt}$ était non nul, ② se réchaufferait (ou se refroidirait) spontanément aux dépens de ① : une différence de température apparaîtrait d'elle-même dans un système isolé initialement à température uniforme. On pourrait alors faire fonctionner une machine thermique entre les deux plaques et produire du travail à partir d'un système en équilibre. Le second principe l'interdit (énoncé de Clausius : la chaleur ne passe pas spontanément d'un corps à un autre corps de même température ou plus chaud). Donc :

$$\frac{dE_2}{dt} = 0. \quad (4)$$

L'Équation 3 avec $\frac{dE_2}{dt} = 0$ donne

$$\frac{A_2}{1-k}\varphi_1 = \varphi_2 \left(1 - \frac{(1-A_1)A_2}{1-k}\right). \quad (5)$$

En multipliant par $1-k$:

$$A_2\varphi_1 = \varphi_2(1-k - (1-A_1)A_2). \quad (6)$$

Or $k = R_1R_2 = (1-A_1)(1-A_2) = 1 - A_1 - A_2 + A_1A_2$, donc

$$1-k - (1-A_1)A_2 = A_1 + A_2 - A_1A_2 - A_2 + A_1A_2 = A_1. \quad (7)$$

Il reste $A_2\varphi_1 = A_1\varphi_2$, c'est-à-dire :

À $\lambda = \Lambda$ et pour une température T ,

$$\frac{\varphi_1}{A_1} = \frac{\varphi_2}{A_2}$$

6. Conclusion : loi de Kirchhoff

La plaque ① sert d'**étalon**. Remplaçons ② par n'importe quel autre corps à la même température : le même raisonnement donne le même rapport φ_1/A_1 . Tous les corps ont donc, à la longueur d'onde Λ et à la température T , le même rapport entre puissance émise et fraction absorbée. Comme Λ et T sont arbitraires :

Loi de Kirchhoff (1859). Pour une longueur d'onde et une température données, le rapport du pouvoir émissif au pouvoir absorbant est le même pour tous les corps :

$$\frac{\varphi}{A} = F(\lambda, T), \quad (8)$$

où F est une fonction universelle, indépendante de la nature du corps.

Un bon absorbeur à une longueur d'onde est donc nécessairement un bon émetteur à cette même longueur d'onde, et réciproquement.

Le **corps noir** est le cas particulier d'un corps qui absorbe tous les rayonnements : $A = 1$ à toutes les longueurs d'onde. Sa puissance émise est alors directement $F(\lambda, T)$. Kirchhoff l'introduit explicitement dans son mémoire de 1860 ; déterminer la forme de F conduira Planck, en 1900, à l'hypothèse des quanta.

7. Remarque critique

L'argument repose sur deux idéalizations : un miroir parfait, et surtout un corps ① qui n'agit qu'à une seule longueur d'onde. Kirchhoff lui-même présente cette dernière comme une hypothèse « sans inconvénient », et non comme un fait établi. C'est pour s'en affranchir qu'il donne en 1860 une démonstration plus générale, fondée sur une enceinte fermée et sur le corps parfaitement noir.