

Le rail de LAPLACE

D'après R. KARAM et al, « *Forces on a current-carrying wire in a magnetic field: the macro-micro connection* », European Journal of Physics 38 (2017).

L'essentiel à retenir

À rédiger en dernier.

1 Présentation classique

1.1 Force mésoscopique de LORENTZ

On rappelle la force de LORENTZ subie par une charge ponctuelle q de vitesse $\vec{v}$ dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1)$$

Si maintenant on considère un cube mésoscopique de volume $d\tau$, contenant une densité n de porteurs de charge q animés d'une vitesse moyenne $\vec{v}$, ce cube subit

$$d\vec{F}_L = nq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d\tau, \quad (2)$$

que l'on peut réorganiser sous la forme :

$$d\vec{F}_L = (\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) d\tau, \quad (3)$$

avec $\vec{j} = nq\vec{v}$ et $\rho = nq$ respectivement les densités de courant et de charge électrique.

Conclusion

À l'échelle mésoscopique, la force de LORENTZ est décrite par une densité volumique de force

$$\vec{f}_L = \frac{d\vec{F}_L}{d\tau} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}.$$

Remarque. La composante magnétique de la force ne travaille pas : $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$.

1.2 Rail de LAPLACE

On considère maintenant deux rails parallèles et fixes, distant d'une longueur ℓ , sur lesquels on applique deux potentiels différents via une alimentation continue. On applique avec un aimant un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$, orthogonal au plan des rails. On oriente les rails selon $\vec{u}_x$ et on pose un fil métallique de section constante S , selon $\vec{u}_y$, de façon à ce qu'il touche les deux rails. Le circuit électrique est alors fermé et un courant $I > 0$ circule dans le fil, dans le sens de $\vec{u}_y$.

Le dispositif est schématisé sur la Fig. 1.

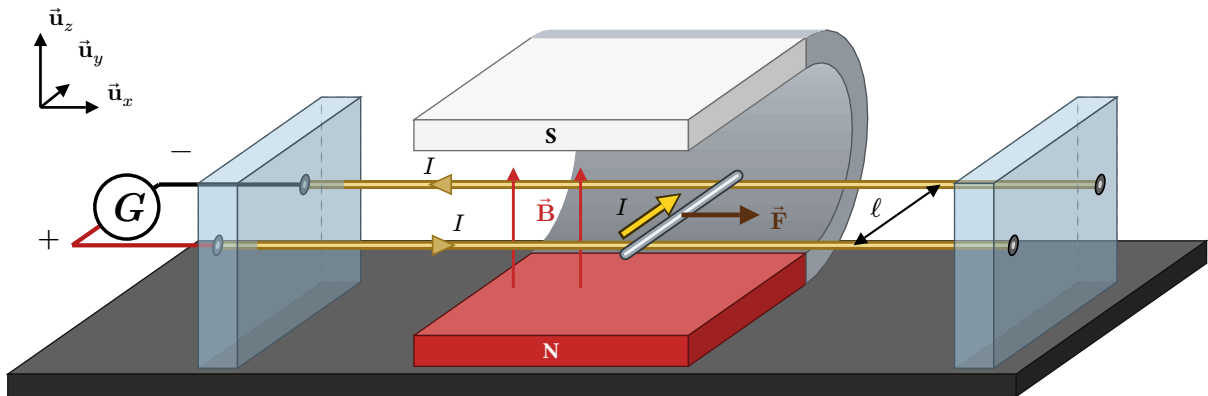


Fig. 1. – Dispositif de LAPLACE. Le champ $\vec{B}$ est vertical, dirigé de N vers S. Le générateur G impose un courant I qui circule dans le fil du rail + vers le rail –, et la force $\vec{F}$ entraîne le fil le long des rails.

Du fait de la force de LORENTZ, les porteurs de charge en mouvement sont soumis à la densité volumique de force $d\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} d\tau$, où le terme électrique $\rho\vec{E}$ est nul puisque le fil est supposé globalement neutre ($\rho = 0$).

Le courant est uniforme dans la section S du fil, $\vec{j} = (\frac{I}{S})\vec{u}_y$. Un élément de longueur dy correspond à $d\tau = S dy$, donc

$$d\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} S dy = \left(\frac{I}{S}\right) B S dy (\vec{u}_y \times \vec{u}_z) = IB dy \vec{u}_x. \quad (4)$$

Intégrée sur le fil, cette densité donne la force subie par le fil :

$$\vec{F} = \int_0^\ell IB dy \vec{u}_x = I\ell B \vec{u}_x = I\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \text{avec} \quad \vec{\ell} = \ell \vec{u}_y. \quad (5)$$

Force de LAPLACE

Un fil de longueur ℓ , parcouru par un courant I et placé dans un champ $\vec{B}$ uniforme, subit

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \|\vec{F}\| = I\ell B.$$

Cette force est orthogonale au fil et au champ, c'est-à-dire le long des rails : le fil se met en mouvement.

En résumé : La force de LAPLACE est la résultante, à l'échelle macroscopique, des forces de LORENTZ subies à l'échelle microscopique par les porteurs de charge.

Remarque.

- Le raisonnement suppose implicitement que le fil est de résistance approx. nulle, que le courant y est uniforme, que $\vec{B}$ est uniforme sur le fil et que la vitesse moyenne des porteurs est bien définie.
- Inverser le sens de I ou celui de $\vec{B}$ inverse le sens de la force.
- Les rails fixes eux aussi subissent la force mais leur position est contrainte, donc ils ne bougent pas.

1.3 Incohérences de la démonstration

Le résultat $\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$ est juste, mais sa démonstration repose sur des raccourcis incohérents entre eux :

1. **Deux hypothèses sur la charge.** En 1.1, $\rho = nq \neq 0$; en 1.2, $\rho = 0$ car le fil est neutre. Il manque donc une seconde population de charges, fixes : le réseau d'ions.
2. **Une force sur les porteurs, pas sur le fil.** $\vec{j} \times \vec{B} d\tau$ s'exerce sur les porteurs mobiles, or c'est le fil entier qui avance. Les ions, immobiles, ne subissent aucune force magnétique, et le point d'application n'est jamais discuté. (Les vrais porteurs sont d'ailleurs des électrons, qui dérivent à contre-sens de $\vec{j}$.)
3. **« Neutre » ne veut pas dire « sans effet électrique ».** $\rho\vec{E} = \vec{0}$ n'implique pas que les forces électriques sur le réseau et sur les électrons soient nulles : elles peuvent seulement se compenser. Et rien n'interdit des charges de surface.
4. **Aucun mécanisme de transmission.** Comment la force sur les électrons passe-t-elle au réseau ? L'image des « chocs » n'est jamais quantifiée, et les électrons n'ont pas de mouvement d'ensemble transverse.
5. **Une force magnétique qui travaille.** La force magnétique ne travaille pas (remarque de 1.1), pourtant le fil qui avance de dx reçoit le travail $\delta W = I\ell B dx \neq 0$.
6. **Un fil supposé immobile.** Dès que le fil avance à la vitesse V , les porteurs acquièrent $V\vec{u}_x$ et la force magnétique a une composante opposée au courant (induction), absente du calcul.

En résumé : Le résultat est exact, mais on ne sait ni sur quoi la force s'exerce, ni comment elle est transmise, ni d'où vient l'énergie : c'est l'objet de la partie 2.

2 Explication réelle

2.1 Qui subit la force de LORENTZ ?

Un fil métallique n'est pas un milieu à une seule espèce de charge. Dans le modèle classique le plus simple, c'est la superposition de deux populations :

- un **réseau d'ions** positifs, fixes, de densité de charge $\rho_+ = +ne$;
- un **gaz d'électrons libres**, de densité de charge $\rho_- = -ne$.

Le fil est localement neutre : $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$, soit autant d'électrons libres que d'ions dans ce modèle. La masse des électrons étant d'environ trois ordre de grandeurs plus faible que celle des ions, la quasi intégralité de la masse du fil est en fait celle du réseau d'ions. Le mouvement qui nous intéresse à l'échelle macroscopique est donc **celui des ions**, non des électrons.

On considère d'abord le fil **au repos**. Quand un courant circule, le réseau reste immobile et les électrons dérivent à la vitesse $\vec{v}_- = -v\vec{u}_y$, d'où, pour un fil de section $S = \pi R^2$,

$$\vec{j} = \rho_- \vec{v}_- = nev\vec{u}_y, \quad I = nevS. \quad (6)$$

On applique la force de LORENTZ à chaque population séparément, dans les mêmes champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Les ions, au repos, ne subissent que la force électrique ; les électrons subissent en plus la force magnétique :

$$\vec{f}_+ = \rho_+ \vec{E}, \quad \vec{f}_- = \rho_- \vec{E} + \rho_- \vec{v}_- \times \vec{B} = \rho_- \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}. \quad (7)$$

La somme $\vec{f}_+ + \vec{f}_-$ redonne bien l'expression de la force de LORENTZ mésoscopique (3), mais la décomposition montre la portion électrique qui existe bel et bien au sein du fil.

Remarque. Dans l'échantillon de 11 manuels analysé par KARAM et al (§2.1), 8 s'en tiennent à la somme des forces de LORENTZ sur les porteurs, 1 invoque des collisions entre les électrons et les ions, et 2 seulement attribuent la transmission de la force à l'effet HALL. C'est cette dernière piste que l'on suit ici.

2.2 La force électrique

Le terme $\vec{j} \times \vec{B}$ ne s'exerce que sur les électrons : c'est la force de LAPLACE, mais appliquée aux électrons alors que c'est le réseau qui se déplace (incohérences 2 et 5 de la section 1.3). Comment cette force est-elle transmise au réseau ?

La force magnétique pousse les électrons vers le côté $+\vec{u}_x$ du fil, mais ils ne peuvent pas en sortir. Le nuage d'électrons se décale donc d'une petite distance $\Delta > 0$ le long de $\vec{u}_x$ par rapport au réseau (Fig. 2). Le fil reste neutre en volume, puisque les deux distributions se recouvrent presque entièrement, mais deux fines couches de charges opposées apparaissent sur ses côtés : c'est l'**effet HALL**. Ce décalage cesse quand le champ électrique ainsi créé compense la force magnétique sur les électrons : on le détermine en trois étapes, avec le champ dans le fil, les charges de surface et l'équilibre des électrons.

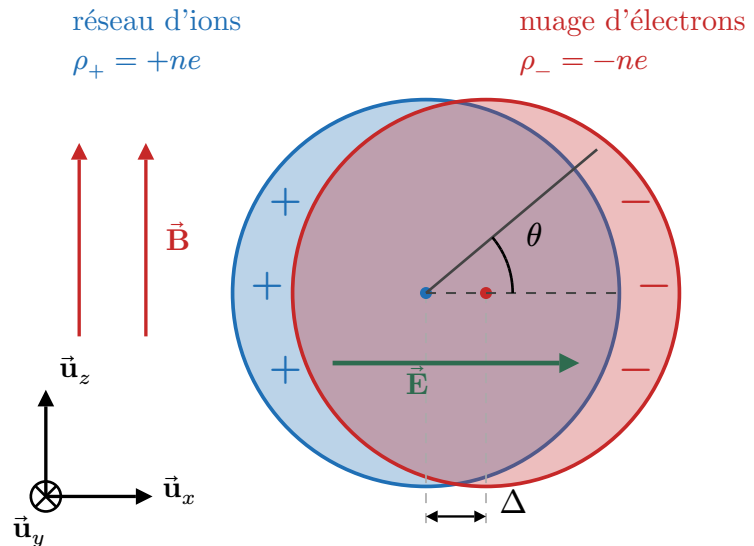


Fig. 2. – Section du fil, vue selon $\vec{u}_y$. Le nuage d'électrons est décalé de Δ par rapport au réseau d'ions. Les charges de surface sont positives à gauche et négatives à droite, et créent un champ électrique $\vec{E}$ uniforme dans le fil.

L'angle θ est mesuré depuis $\vec{u}_x$ dans le plan xz .

Étape 1 — Champ électrique dans le fil

Le rayon R du fil étant supposé très inférieur à sa longueur, on néglige les effets de bord et on traite chaque distribution de charges comme un cylindre de longueur infinie et uniformément chargé. Par symétrie, le champ d'une telle distribution, de densité de charge ρ_c , est radial. On rappelle le théorème de GAUSS en électrostatique :

Théorème de GAUSS pour l'électrostatique

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée S est égal à la charge Q_{int} qu'elle contient sur ε_0 .

Appliqué à un cylindre de rayon $r < R$ et de hauteur h , il donne

$$\oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r \vec{e}_r, \quad (8)$$

Le réseau ionique, d'axe Oy , crée donc $\vec{E}_+ = \frac{ne}{2\varepsilon_0} r \vec{e}_r$; le nuage d'électrons, dont l'axe est décalé de $\Delta \vec{u}_x$, crée $\vec{E}_- = -\frac{ne}{2\varepsilon_0} (r \vec{e}_r - \Delta \vec{u}_x)$. Leur somme est

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{ne\Delta}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x. \quad (9)$$

Le champ est **uniforme** dans tout le fil, dirigé selon $+\vec{u}_x$, des charges positives vers les charges négatives.

Étape 2 — Charges de surface

Pour être plus précis sur l'origine du champ $\vec{E}$, observons que cette situation amène à l'apparition de charges surfaciques : à l'angle θ (mesuré depuis $\vec{u}_x$ dans le plan xz), le bord du cylindre d'électron dépasse celui du des ions de $\Delta \cos \theta$, comptée radialement. Il en résulte une densité surfacique de charge

$$\sigma(\theta) = -ne\Delta \cos \theta, \quad (10)$$

négative du côté $+\vec{u}_x$ et positive du côté opposé. Ce sont ces charges qui créent le champ de (9). Le fil est bien neutre en volume, $\rho = 0$, mais pas à sa surface : c'est ce que ne voyait pas la démonstration classique (incohérence 3 de la section 1.3).

Étape 3 — L'équilibre des électrons

Le champ agit sur les deux populations. Par unité de volume, il exerce sur le réseau $\rho_+ \vec{E} = ne\vec{E}$ et sur les électrons $\rho_- \vec{E} = -ne\vec{E}$: deux forces opposées, d'où $\rho \vec{E} = \vec{0}$. En régime permanent, les électrons ne dérivent que le long du fil : transversalement, ils sont à l'équilibre. D'après (7), cela s'écrit

$$-ne\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \vec{0} \implies E = vB. \quad (11)$$

Le champ électrique compense exactement la force magnétique sur les électrons. Avec (9), cela fixe le déplacement du nuage :

$$\Delta = \frac{2\varepsilon_0 v B}{ne} = \frac{2\varepsilon_0 B I}{\pi n^2 e^2 R^2}. \quad (12)$$

On verra à la section 3 les ordres de grandeur de Δ et des charges de surface.

Effet HALL dans le fil

La force magnétique décale le nuage d'électrons de Δ ; les charges de surface qui en résultent créent un champ électrique uniforme

$$\vec{E} = \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{ne} = vB \vec{u}_x,$$

qui compense la force magnétique sur les électrons et qui pousse, en revanche, le réseau d'ions.

2.3 Passage du mésoscopique au macroscopique

Il reste à relier les forces à l'échelle des populations (mésoscopique) à la force sur le fil (macroscopique). Pour les électrons, l'équilibre transverse ($\vec{f}_- = \vec{0}$ dans (7)) donne $\rho_- \vec{E} = -\vec{j} \times \vec{B}$. Or $\rho_+ = -\rho_-$, donc la force électrique sur le réseau vaut

$$\vec{f}_+ = \rho_+ \vec{E} = -\rho_- \vec{E} = \vec{j} \times \vec{B}. \quad (13)$$

Le réseau reçoit donc exactement la densité de force $\vec{j} \times \vec{B}$ de la démonstration classique, mais c'est maintenant une force **électrique**, exercée sur les ions, et non une force magnétique exercée sur les porteurs. En intégrant sur le volume du fil, on retrouve (5) :

$$\vec{F}_E^i = \iiint_{\text{fil}} \vec{f}_+ d\tau = I \vec{\ell} \times \vec{B}. \quad (14)$$

En notant $\vec{F}_M^e$ la force magnétique sur les électrons, $\vec{F}_E^e$ et $\vec{F}_E^i$ les forces électriques sur les électrons et sur les ions, et $\vec{R}$ les autres forces sur le réseau (poids, réactions des rails, frottements), la dynamique des deux populations s'écrit, pour un fil de masse m et d'accélération $\vec{a}$:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}_E^i + \vec{R} & (\text{réseau}) \\ \vec{0} &= \vec{F}_M^e + \vec{F}_E^e & (\text{électrons}) \\ \vec{0} &= \vec{F}_E^i + \vec{F}_E^e & (\text{action-réaction}) \end{aligned}$$

Les deux dernières équations donnent $\vec{F}_E^i = \vec{F}_M^e$: les forces électriques internes s'éliminent, et la première devient

$$m\vec{a} = \vec{F}_M^e + \vec{R} = I \vec{\ell} \times \vec{B} + \vec{R}. \quad (15)$$

Vu de l'extérieur, le fil se comporte comme s'il subissait directement la force magnétique exercée sur les électrons : c'est la force de LAPLACE. Mais à l'échelle des populations, cette force a été transmise du gaz d'électrons au réseau par le champ électrique de l'effet HALL.

Du microscopique au macroscopique

La force de LAPLACE $\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B}$ est la force magnétique subie par les électrons de conduction, transmise intégralement au réseau d'ions, donc au fil, par la force électrique de l'effet HALL. Le réseau ne subit aucune force magnétique, et les forces électriques internes se compensent.

Les incohérences de la section 1.3 se lèvent ainsi : (1) les deux populations $\rho_{\pm}$ sont maintenant explicites ; (2) la force s'applique au réseau ; (3) $\rho\vec{E} = \vec{0}$ cache deux forces électriques opposées et non nulles ; (4) la transmission se fait par le champ de HALL, et non par des chocs ; (5) et (6) sont levées par le bilan énergétique ci-dessous.

Bilan énergétique. Quand le fil avance à la vitesse $V\vec{u}_x$ le long des rails, chaque électron a la vitesse $\vec{w} = V\vec{u}_x - v\vec{u}_y$ et subit la force magnétique

$$-e\vec{w} \times \vec{B} = evB\vec{u}_x + eVB\vec{u}_y. \quad (16)$$

Le premier terme est celui qui est transmis au réseau. Le second, selon $\vec{u}_y$, s'oppose à la dérive des électrons : c'est l'induction. La puissance de la force magnétique est nulle, comme il se doit :

$$(evB\vec{u}_x + eVB\vec{u}_y) \cdot (V\vec{u}_x - v\vec{u}_y) = evVB - eVvB = 0. \quad (17)$$

La puissance reçue par le réseau est $\vec{F}_E^i \cdot V\vec{u}_x = I\ell BV$. Elle est prélevée sur le générateur, qui doit compenser la force électromotrice d'induction $\mathcal{E}_i = B\ell V$ pour maintenir le courant, et l'on a bien $\mathcal{E}_i I = I\ell BV$. La force magnétique n'est qu'un intermédiaire : elle convertit la puissance électrique du générateur en puissance mécanique, sans en fournir elle-même.

Remarque. Ce modèle est celui d'électrons libres formant un nuage rigide. Il explique l'essentiel, mais pas tout : pour les semi-conducteurs, ou lorsque le coefficient de HALL est positif, le champ de HALL ne suffit pas et d'autres mécanismes interviennent (KARAM, KNEUBIL et ROBILOTTA, §2.2). La loi macroscopique $\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B}$ reste, elle, valable dans tous les cas.

3 Variante quantitative : rail suspendu de LAPLACE et balance de COTTON

La balance de COTTON, mise au point par Aimé COTTON en 1900, mesure un champ magnétique par pesée : son schéma de principe est donné en Fig. 3.

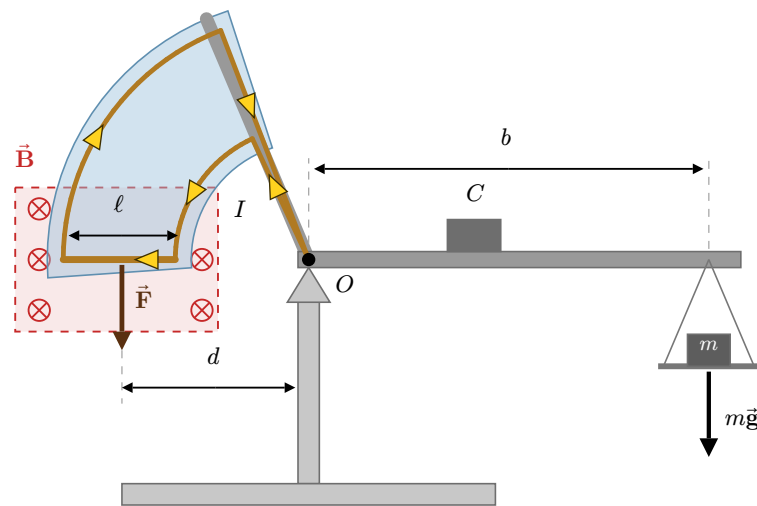


Fig. 3. – Balance de COTTON vue de profil, à l'équilibre. Le fléau de gauche porte deux arcs de cercle centrés sur l'axe O , reliés par un conducteur horizontal de longueur ℓ placé dans un champ $\vec{B}$ uniforme, perpendiculaire à la figure et entrant ; celui de droite porte un contrepoids C et un plateau qui reçoit la masse m . Les forces de LAPLACE sur les arcs sont radiales : seule la force $\vec{F}$ sur le conducteur horizontal, à la distance d de O , fait tourner le fléau.

4 Approche historique
