

L'approximation des régimes quasi-stationnaires

D'après A. Doms, « *Remarques sur l'approximation des régimes quasi stationnaires en électromagnétisme* », Bulletin de l'Union des Physiciens (vol. 97, Fév. 2003).

L'essentiel à retenir

L'ARQS consiste à négliger les temps de propagation dans le calcul des *potentiels* (V , $\mathbf{A}$); elle est légitime lorsque $\varepsilon = L/(c\tau) \ll 1$. Cependant cette seule hypothèse ne permet pas de savoir lequel des deux *champs* ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$) se comporte comme un champ quasi-statique : il faut une seconde hypothèse, portant sur les sources et mesurée par $\xi = \frac{j}{\rho c}$. Selon que les charges ou les courants dominent, on obtient deux régimes symétriques : l'**ARQS électrique** ($\mathbf{E}$ n'est créé que par les charges et non par l'induction $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$) et l'**ARQS magnétique** ($\mathbf{B}$ n'est créé que par les courants et non par le courant de déplacement $\mathbf{j}_d$).

1 Des équations de Maxwell aux potentiels retardés

1.1 Équations de Maxwell et potentiels

Dans le vide, en présence de sources $(\rho, \mathbf{j})$, les champs obéissent aux équations de Maxwell :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{MF}) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{MG}) \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{MA}) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{M}\Phi) \quad (2)$$

avec $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. On en déduit la conservation de la charge, $\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t = 0$. Les équations (MΦ) et (MF) permettent d'introduire un potentiel scalaire V et un potentiel vecteur $\mathbf{A}$ tels que

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3)$$

Le terme $-\partial \mathbf{A} / \partial t$ est appelé *terme de Neumann* ; c'est lui qui rend compte des phénomènes d'induction.

1.2 Choix de jauge et équations de propagation

Les potentiels ne sont pas uniques : la transformation $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi$, $V \rightarrow V - \partial \chi / \partial t$ laisse les champs inchangés quelle que soit la fonction χ . On profite de cette *liberté de jauge* pour imposer la condition de Lorenz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

qui a l'avantage de découpler les équations obtenues en reportant (3) dans (MG) et (MA). On obtient deux équations de propagation (de d'Alembert) avec terme source :

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (5)$$

1.3 Les potentiels retardés

Il reste à résoudre (5) par la méthode de la *fonction de Green* : on calcule la réponse G à une source ponctuelle et instantanée, puis on superpose. La théorie des fonctions de Green, non développée ici, donne

$$\square G = -\delta(\mathbf{r}) \delta(t) \quad \text{et} \quad G = 0 \text{ pour } t < 0 \quad \Rightarrow \quad G(r, t) = \frac{\delta(t - r/c)}{4\pi r},$$

une impulsion sphérique émise en O à l'instant 0, qui s'éloigne à la vitesse c . La source ρ/ε_0 étant une somme de sources ponctuelles $\rho(P, t') d\tau dt' / \varepsilon_0$ placées en $P \in \mathbb{R}^3$ à l'instant t' , la linéarité donne

$$V(M, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{P \in \mathbb{R}^3} \int_{t' \in \mathbb{R}} \rho(P, t') G(PM, t - t') d\tau dt',$$

où la distribution de Dirac simplifie l'intégrale temporelle en ne retenant que l'instant d'émission $t' = t - PM/c$. Le même raisonnement s'applique à chaque composante de $\mathbf{A}$, avec ρ/ε_0 remplacé par $\mu_0 \mathbf{j}$. On obtient ainsi :

Potentiels retardés

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in \mathbb{R}^3} \frac{\rho(P, t - PM/c)}{PM} d\tau \quad \mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(P, t - PM/c)}{PM} d\tau \quad (6)$$

Le potentiel en M à l'instant t dépend de l'état des sources en P à l'instant antérieur $t - PM/c$: le retard PM/c est la durée de propagation de P à M .

En résumé : les potentiels en M à l'instant t ne dépendent pas de l'état des sources au même instant, mais de leur état à des instants antérieurs : l'influence des charges et des courants se propage à la vitesse c , si bien que le retard est d'autant plus grand que la source est éloignée. Lorsque ce retard reste petit devant le temps d'évolution des sources, on peut le négliger : c'est l'ARQS.

2 L'ARQS pour les potentiels

2.1 Principe et critère

L'ARQS consiste à négliger le temps de propagation dans (6), c'est-à-dire à évaluer les sources à l'instant t plutôt qu'à l'instant $t - PM/c$. Notons τ le temps typique de variation des sources, et L la distance typique entre les sources et la région où l'on calcule les champs. Un développement limité donne

$$\rho(P, t - PM/c) = \rho(P, t) - \frac{PM}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}(P, t) + O\left(\left(\frac{PM}{c}\right)^2\right)$$

Le terme correctif est de l'ordre de $(L/c)(\rho/\tau)$, soit une correction relative d'ordre $L/(c\tau)$.

Critère de l'ARQS traditionnel

L'ARQS est légitime lorsque

$$\varepsilon = \frac{L}{c\tau} \ll 1,$$

c'est-à-dire lorsque les dimensions du système sont petites devant la longueur d'onde $\lambda = c\tau$.

Situation	τ	L	ε	ARQS
Circuit électrique à 50 Hz	20 ms	1 m	$1,7 \cdot 10^{-7}$	valable
Réseau électrique national, 50 Hz	20 ms	1000 km	0,17	discutable
Antenne Wi-Fi, 2,4 GHz	0,4 ns	10 cm	0,8	non valable

2.2 Potentiels quasi-stationnaires

Potentiels dans l'ARQS

$$V(M, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in \mathbb{R}^3} \frac{\rho(P, t)}{PM} d\tau \quad \mathbf{A}(M, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(P, t)}{PM} d\tau \quad (7)$$

Ce sont les formules de la statique, solutions de $\Delta V + \rho/\epsilon_0 \simeq 0$ et $\Delta \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j} \simeq 0$.

Remarque. Les potentiels (7) vérifient encore *exactement* la condition de Lorenz (4). En effet, grâce à une intégration par parties puis à la conservation de la charge,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \mathbb{R}^3} \frac{\nabla_P \cdot \mathbf{j}}{PM} d\tau = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{PM} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}.$$

En particulier, $\nabla \cdot \mathbf{A}$ n'est *pas* nul en général, contrairement à ce qui se passe en magnétostatique. Ce détail sera décisif dans la partie suivante.

3 Et les champs ? Le piège de la présentation traditionnelle

Les grandeurs mesurables sont les champs, et non les potentiels. Il reste donc à savoir ce que l'ARQS implique réellement pour les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$.

3.1 La conclusion traditionnelle

On trouve habituellement deux raisonnements, qui conduisent à la même conclusion.

- **Par les potentiels.** D'après (7), $\mathbf{A}$ s'obtient à chaque instant comme en magnétostatique : $\Delta \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j} \simeq \mathbf{0}$. En magnétostatique, on en déduit $\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}$, puisque $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ en jauge de Coulomb. On conclut que $\mathbf{B}$ est à chaque instant magnétostatique.
- **Par les ordres de grandeur.** Notons $\tilde{E}$, $\tilde{B}$ les ordres de grandeur des champs et $d \lesssim L$ leur échelle de variation spatiale. En estimant $\|\nabla \times \mathbf{E}\| \sim \tilde{E}/d$, l'équation (MF) donne $\tilde{E} \sim \tilde{B}d/\tau$. Le rapport du courant de déplacement à $\nabla \times \mathbf{B}$ vaut alors $(d/c\tau)^2 \lesssim \varepsilon^2 \ll 1$.

La conclusion est que le courant de déplacement est toujours négligeable : $\mathbf{B}$ est quasi-magnétostatique, les courants sont à flux conservatif ($\nabla \cdot \mathbf{j} \simeq 0$), tandis que $\mathbf{E}$ conserve une partie non conservative, le terme de Neumann. C'est le cadre de l'induction.

3.2 Un exemple et un contre-exemple : le solénoïde et le condensateur

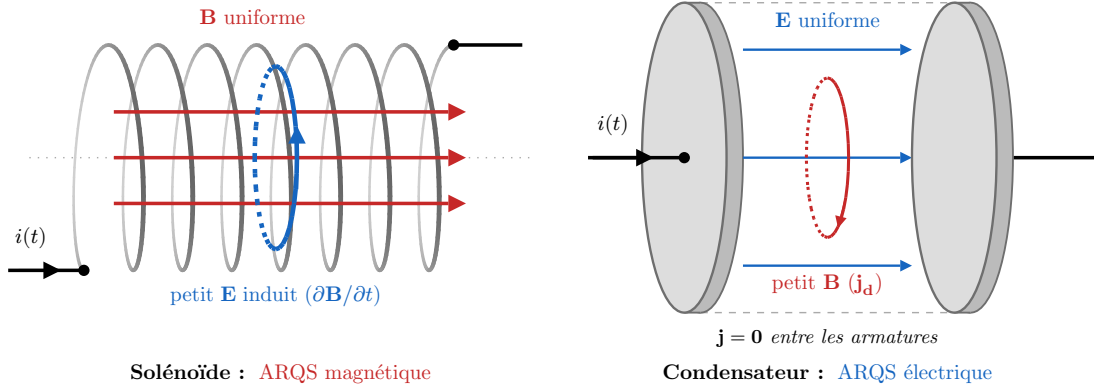


Fig. 1. – Solénoïde et condensateur en régime variable. L'étude des deux mène à dissocier deux types d'ARQS.

Examinons deux dispositifs de rayon R en régime sinusoïdal de pulsation ω (figure ci-dessus), avec $\varepsilon \sim R\omega/c \ll 1$. Les champs exacts font intervenir des fonctions de Bessel de $x = r\omega/c$, que l'on limite au premier ordre puisque $x \ll 1$. Les deux dispositifs sont donc dans l'ARQS ; voyons s'ils se comportent comme annoncé.

Le solénoïde. Pour un solénoïde long parcouru par un courant sinusoïdal, on obtient au premier ordre

$$\underline{\mathbf{B}} \simeq B_0 \mathbf{u}_z \quad \underline{\mathbf{E}} \simeq -\frac{i\omega r}{2} B_0 \mathbf{u}_\theta. \quad (8)$$

Le champ magnétique est le champ magnétostatique uniforme usuel, créé par les courants du bobinage ; le courant de déplacement est négligeable ici (ordre 2).

Le champ électrique est induit, ce que l'on retrouve en appliquant la loi de Faraday à un cercle de rayon r :

$$\underline{E} \cdot 2\pi r = -i\omega B_0 \pi r^2 \Rightarrow \underline{E} = -\frac{i\omega r}{2} B_0.$$

Tout est conforme à la conclusion traditionnelle : $\mathbf{B}$ est magnétostatique, $\mathbf{j}_d$ est négligeable, et $\mathbf{E}$ est non conservatif, entièrement dû à $\partial \mathbf{B} / \partial t$.

On note de plus que $cB/E \sim 2/x \gg 1$: le champ magnétique domine. Le solénoïde ne pose donc aucune difficulté à la présentation traditionnelle.

Le condensateur. Pour un condensateur plan à armatures circulaires, on obtient au premier ordre

$$\underline{\mathbf{E}} \simeq E_0 \mathbf{u}_z \quad \underline{\mathbf{B}} \simeq \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 \mathbf{u}_\theta. \quad (9)$$

Le champ électrique est le champ électrostatique uniforme usuel. Le champ magnétique, lui, n'est pas magnétostatique.

Entre les armatures, aucun courant ne circule ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$) : si l'on avait $\nabla \times \mathbf{B} \simeq \mu_0 \mathbf{j}$, la circulation de $\mathbf{B}$ sur tout cercle d'axe Oz serait nulle, et l'on aurait $B_\theta = 0$. Le champ $\mathbf{B}$ est en réalité entièrement dû à $\mathbf{j}_d$, comme le montre le théorème d'Ampère généralisé, appliqué à un cercle de rayon r :

$$\underline{B} \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 (i\omega E_0) \pi r^2 \Rightarrow \underline{B} = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0.$$

Les rôles sont inversés par rapport au solénoïde : $\mathbf{E}$ est statique et domine ($cB/E \sim x/2 \ll 1$), tandis que $\mathbf{B}$ est créé par $\partial \mathbf{E} / \partial t$.

On est pourtant bien dans l'ARQS : c'est donc la conclusion traditionnelle qui est en défaut.

3.3 Où se trouvent les erreurs ?

Dans le raisonnement par les potentiels. On a bien $\Delta \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j} \simeq \mathbf{0}$, mais

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \simeq \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mu_0 \mathbf{j}.$$

En magnétostatique, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$; ici, d'après la remarque de la partie 2, $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \partial V / \partial t$. Il vient donc

$$\nabla \times \mathbf{B} \simeq -\frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}. \quad (10)$$

Lorsque $\mathbf{E} \simeq -\nabla V$, le premier terme n'est autre que $\mu_0 \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$: on retrouve l'équation de Maxwell-Ampère complète. On ne peut négliger le courant de déplacement sans connaître l'ordre de grandeur de $\mathbf{E}$.

Dans le raisonnement par les ordres de grandeur. L'estimation $\|\nabla \times \mathbf{E}\| \sim \tilde{E}/d$ est fautive en général : un rotationnel est une différence de dérivées, comme $\partial_x E_y - \partial_y E_x$, qui peut être bien plus petite que chacune d'elles, voire nulle, comme pour un champ électrostatique. On peut seulement affirmer $\tilde{B}/\tau \lesssim \tilde{E}/d$, ce qui ne permet plus de conclure.

Règle pour les ordres de grandeur

Une dérivée spatiale d'un champ peut toujours être *majorée* par $\tilde{E}/d$. En revanche, on ne peut pas affirmer qu'un rotationnel ou une divergence *vaut* $\tilde{E}/d$: des compensations sont possibles.

4 Un second paramètre : ξ

La condition $\varepsilon \ll 1$ permet de négliger les temps de propagation, mais elle ne dit pas si le régime est plutôt électrique ou magnétique. Il faut pour cela comparer l'importance des charges et des courants.

On introduit

$$\xi = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c}, \quad (11)$$

où $\tilde{\rho}$ et $\tilde{j}$ désignent les ordres de grandeur des parties variables des sources. Ainsi, $\xi \ll 1$ correspond à des sources dominées par les charges, tandis que $\xi \gg 1$ correspond à des sources dominées par les courants.

Les potentiels quasi-stationnaires (7) donnent, en ordre de grandeur,

$$\tilde{A} \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\tilde{j} \mathcal{V}}{L} \quad \text{et} \quad \tilde{V} \sim \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\tilde{\rho} \mathcal{V}}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{c \tilde{A}}{\tilde{V}} \sim \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c} = \xi. \quad (12)$$

Ainsi, ξ mesure également l'importance relative du potentiel vecteur et du potentiel scalaire.

Remarque. Pour une seule population de porteurs de vitesse v , $j = \rho v$, donc $\xi = \frac{v}{c} \ll 1$. Le régime $\xi \gg 1$ suppose au contraire une quasi-neutralité : des charges opposées se compensent alors qu'un courant subsiste, comme dans un métal.

4.1 Contrainte de conservation de la charge

Les sources vérifient $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$. Comme la partie variable de ρ évolue sur le temps τ ,

$$\frac{\tilde{\rho}}{\tau} \sim |\partial \rho / \partial t| = |\nabla \cdot \mathbf{j}| \lesssim \frac{\tilde{j}}{L} \Rightarrow \xi \gtrsim \varepsilon.$$

L'inégalité vient de ce qu'une divergence peut être bien plus petite que $\frac{\tilde{j}}{L}$: les dérivées qui la composent peuvent se compenser. Ainsi, la conservation de la charge ne fixe pas ξ , mais impose seulement une borne inférieure.

On peut aussi écrire

$$\frac{\xi}{\varepsilon} = \frac{\tilde{j} \tau}{\tilde{\rho} L}.$$

Ce rapport mesure donc, en ordre de grandeur, combien le courant total est grand devant la seule composante nécessaire pour faire varier la densité de charge sur le temps τ .

Contrainte de conservation de la charge

$$\xi \gtrsim \varepsilon$$

Pour $\xi \sim \varepsilon$, le courant alimente directement des accumulations de charge, comme dans un condensateur. Pour $\xi \gg \varepsilon$, il peut être presque à divergence nulle ; c'est la situation de l'ARQS magnétique.

5 L'ARQS électrique : $\xi \ll 1$

Étape 1 — Le champ électrique. On compare les deux termes de (3) :

$$\frac{\|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\|}{\|\nabla V\|} \sim \frac{\tilde{A}/\tau}{\tilde{V}/d} = \frac{c\tilde{A}}{\tilde{V}} \cdot \frac{d}{c\tau} \lesssim \xi \varepsilon \ll 1.$$

Le terme de Neumann est négligeable : $\mathbf{E} \simeq -\nabla V$, ce qui revient à $\nabla \times \mathbf{E} \simeq \mathbf{0}$. On néglige donc le terme de Faraday $\partial \mathbf{B}/\partial t$. C'est une approximation d'ordre 2, puisque c'est le produit $\xi \varepsilon$ qui intervient.

Étape 2 — Comparaison des champs. Avec $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ et $\mathbf{E} \simeq -\nabla V$:

$$\frac{c\tilde{B}}{\tilde{E}} \lesssim \frac{c\tilde{A}/d}{\tilde{V}/d} = \xi \ll 1.$$

L'interaction électrique domine l'interaction magnétique.

ARQS électrique, ou « limite des condensateurs »

$$\nabla \times \mathbf{E} \simeq \mathbf{0} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13)$$

$\mathbf{E}$ se calcule comme en électrostatique et domine ($E \gg cB$). Le champ $\mathbf{B}$ dépend des variations temporelles de $\mathbf{E}$. C'est ce qui justifie le calcul électrostatique de la capacité d'un condensateur en régime alternatif.

6 L'ARQS magnétique : $\xi \gg 1$

Étape 1 — Le champ magnétique. On compare les deux termes du membre de droite de (10), en utilisant (12) :

$$\frac{\|\frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial V}{\partial t}\|}{\|\mu_0 \mathbf{j}\|} \sim \frac{\varepsilon_0 \tilde{V}}{\tilde{j} d \tau} = \frac{\varepsilon}{\xi} \cdot \underbrace{\frac{\mathcal{V}}{4\pi L^2 d}}_{\lesssim 1} \lesssim \frac{\varepsilon}{\xi} \ll 1.$$

Le dernier facteur ne dépend que de la géométrie et reste usuellement inférieur à 1. On obtient $\nabla \times \mathbf{B} \simeq \mu_0 \mathbf{j}$: le courant de déplacement est négligeable et $\mathbf{B}$ est à chaque instant magnétostatique.

Étape 2 — Comparaison des champs. On majore E par $\|\nabla V\| + \|\partial \mathbf{A}/\partial t\|$. De $\nabla \times \mathbf{B} \simeq \mu_0 \mathbf{j}$, on tire $\mu_0 \tilde{j} \lesssim \tilde{B}/d$, soit une *minoration* $\tilde{B} \gtrsim \mu_0 d \tilde{j}$, conformément à la règle de la partie 3. Il vient

$$\frac{\tilde{E}}{c\tilde{B}} \lesssim \frac{\tilde{V}/d + \tilde{A}/\tau}{c\mu_0 d \tilde{j}} = \frac{1}{\xi} \cdot \underbrace{\frac{\mathcal{V}}{4\pi d^2 L}}_{\lesssim 1} + \varepsilon \cdot \underbrace{\frac{\mathcal{V}}{4\pi d L^2}}_{\lesssim 1} \lesssim \frac{1}{\xi} + \varepsilon \ll 1.$$

L'interaction magnétique domine l'interaction électrique.

ARQS magnétique, ou « limite des bobines »

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{B} \simeq \mu_0 \mathbf{j} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (14)$$

$\mathbf{B}$ se calcule comme en magnétostatique et domine ($cB \gg E$) ; les courants sont à flux conservatif. Le champ $\mathbf{E}$ dépend des variations temporelles de $\mathbf{B}$: c'est le cadre de l'induction, qui justifie le calcul magnétostatique de l'inductance d'une bobine en régime alternatif.

La condition de jauge. Un terme de $\nabla \cdot \mathbf{A}$, d'ordre $\tilde{A}/L$, et le terme $\frac{1}{c^2} \partial V/\partial t$, d'ordre $\tilde{V}/(c^2 \tau)$, sont dans le rapport $(c\tilde{A}/\tilde{V})(c\tau/L) \sim \xi/\varepsilon$. Dans l'ARQS magnétique, ce rapport est très grand : la condition de Lorenz se réduit à la jauge de Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A} \simeq 0$, ce qui justifie *a posteriori* le raisonnement par les potentiels de la partie 3. Dans l'ARQS électrique, où ξ peut être de l'ordre de ε , les deux termes sont comparables et la jauge de Lorenz doit être conservée.

7 Le point de vue des changements de référentiel

Les lois « galiléennes » souvent utilisées, $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ et $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$, sont incohérentes : un faisceau homocinétique de charges ne crée aucun champ magnétique dans son référentiel propre, mais en crée un dans le laboratoire. La limite $u \ll c$ des transformations de Lorentz ne règle pas le problème, car les lois obtenues ne forment pas un groupe. Le Bellac et Lévy-Leblond ont montré qu'il existe en fait *deux* limites galiléennes cohérentes, selon la valeur de $\zeta = cB/E$, qui joue le rôle de ξ :

$$\text{électrique } (\zeta \ll 1) : \begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}/c^2 \end{cases} \quad \text{magnétique } (\zeta \gg 1) : \begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} \end{cases}$$

Chaque ARQS est exactement covariante par la transformation de Galilée qui lui correspond ; la jauge de Coulomb et $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ ne le sont que dans la limite magnétique. L'électromagnétisme quasi-stationnaire est donc compatible avec la physique galiléenne, à condition de choisir la bonne limite. L'induction dans un circuit mobile relève de la limite magnétique, ce qui justifie l'usage de $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ dans le référentiel du conducteur.

8 Synthèse

À retenir :

$$\varepsilon = \frac{L}{c\tau}$$

Détermine si l'on est en ARQS : $\varepsilon \ll 1$.

$$\xi = \frac{\tilde{j}}{\rho c}$$

Détermine le type d'ARQS : magnétique si $\xi \gg 1$.

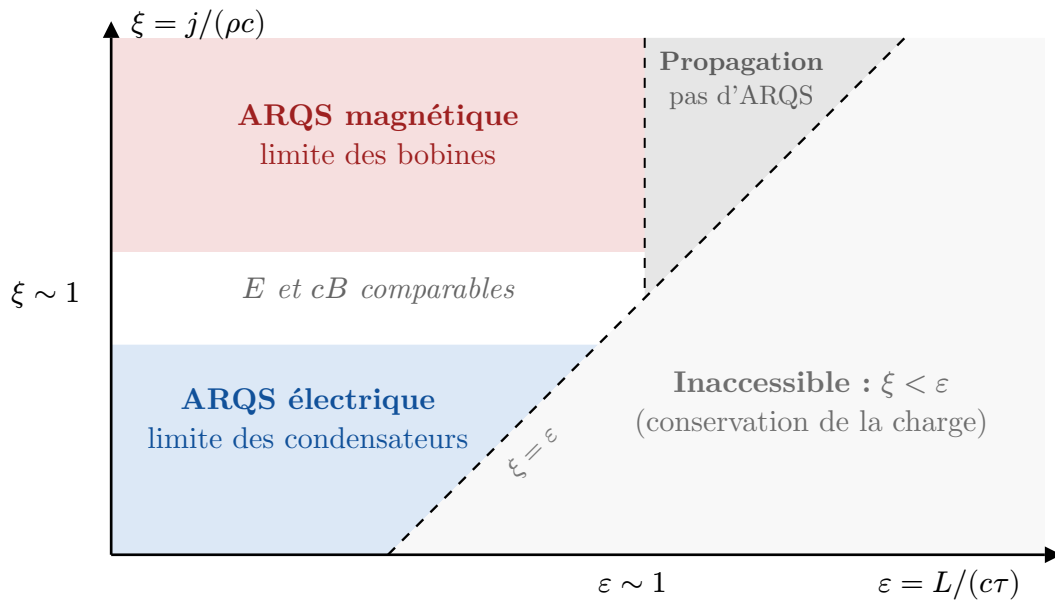


Fig. 2. – Carte des régimes. $\varepsilon \ll 1$ ne suffit pas : ξ décide lequel des deux champs est statique.

	ARQS électrique	ARQS magnétique
Hypothèses	$\varepsilon \lesssim \xi \ll 1$	$\varepsilon \ll 1$ et $\xi \gg 1$
Sources dominantes	charges : $\tilde{\rho}c \gg \tilde{j}$	courants : $\tilde{j} \gg \tilde{\rho}c$
Terme négligé	Faraday : $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	déplacement : $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
Équation simplifiée	$\nabla \times \mathbf{E} \approx 0$	$\nabla \times \mathbf{B} \approx \mu_0 \mathbf{j}$
Champ dominant	$E \gg cB$	$cB \gg E$
Exemple type	condensateur	bobine