J. J. THOMSON

Sur la structure de l'atome

étude de la stabilité et des périodes d'oscillation d'un certain nombre de corpuscules disposés à intervalles égaux sur la circonférence d'un cercle ; application des résultats à la théorie de la structure atomique

(*On the Structure of the Atom*)

Philosophical Magazine, 6e série, vol. 7, n° 39
(mars 1904), p. 237–265

TRADUCTION FRANÇAISE

LE TEXTE

Thomson place n corpuscules négatifs (des électrons) dans une sphère d'électricité positive uniforme et cherche à quelles conditions un anneau de corpuscules en rotation est stable. Le calcul des fréquences d'oscillation montre qu'un anneau de plus de cinq corpuscules n'est stable que si d'autres corpuscules occupent l'intérieur : l'atome se compose d'anneaux concentriques. Une construction graphique donne ces configurations, dont les « familles » rappellent la classification périodique, la valence et le caractère électropositif ou électronégatif des éléments. L'article finit sur une explication de la radioactivité.

CETTE TRADUCTION

La traduction a été **générée par une IA** (Claude, Anthropic) et n'a pas été relue par un traducteur : pour toute citation, se reporter au texte anglais. Elle garde le vocabulaire de l'époque (« corpuscule », « électrisation », « électropositif ») et la présentation du *Philosophical Magazine* : même format, même caractère, mêmes formules, avec leurs coquilles. Le texte, plus long en français, court librement d'une page à l'autre : la pagination suit celle de l'original, mais pas le contenu de chaque page ; les renvois internes (« p. 240 ») désignent les pages de l'original.

Source : *Phil. Mag.* (6) 7, 237–265 (1904), doi:10.1080/14786440409463107.

THE

LONDON, EDINBURGH, AND DUBLIN

PHILOSOPHICAL MAGAZINE

AND

JOURNAL OF SCIENCE.

[SIXTH SERIES.]

MARCH 1904.

XXIV. *Sur la structure de l'atome : étude de la stabilité et des périodes d'oscillation d'un certain nombre de corpuscules disposés à intervalles égaux sur la circonférence d'un cercle ; avec application des résultats à la théorie de la structure atomique. Par* J. J. THOMSON, *F.R.S., professeur Cavendish de physique expérimentale, Cambridge**.

L'HYPOTHÈSE selon laquelle les atomes des éléments se composent d'un certain nombre de corpuscules électrisés négativement, enfermés dans une sphère d'électrisation positive uniforme, suggère, entre autres problèmes mathématiques intéressants, celui qui est traité dans ce mémoire : le mouvement d'un anneau de n particules électrisées négativement, placées à l'intérieur d'une sphère uniformément électrisée. Supposons qu'à l'équilibre les n corpuscules soient disposés à intervalles angulaires égaux sur la circonférence d'un cercle de rayon a, chaque corpuscule portant une charge e d'électricité négative. Soit νe la charge d'électricité positive contenue dans la sphère ; si b est le rayon de cette sphère, l'attraction radiale exercée sur un corpuscule par l'électrisation positive est égale à $\nu e^2 a/b^3$; si les corpuscules sont au repos, cette attraction doit être équilibrée par la répulsion qu'exercent les autres corpuscules. Or la répulsion suivant OA, O étant le centre de la sphère, exercée sur un corpuscule situé en A par un corpuscule situé en B, est égale à $\frac{e^2}{\mathrm{AB}^2}$ cos OAB, et, si OA = OB, elle est égale à $\frac{e^2}{4\mathrm{OA}^2 \sin \frac{1}{2}\,\mathrm{AOB}}$: par conséquent, si nous avons n corpuscules disposés à intervalles angulaires égaux

* Communiqué par l'auteur.

$2\pi/n$ sur la circonférence d'un cercle, la répulsion radiale exercée sur un corpuscule par les $(n-1)$ autres est égale à

$$\frac{e^2}{4a^2}\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi}{n}+\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{n}+\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{n}+\ldots\quad+\operatorname{cosec}\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Si les corpuscules sont au repos, cette répulsion doit être égale à l'attraction radiale. Si donc

$$\mathrm{S}_n=\operatorname{cosec}\frac{\pi}{n}+\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{n}+\ldots\quad\operatorname{cosec}\frac{(n-1)\pi}{n},$$

$$\frac{\nu e^2 a}{b^3}=\frac{e^2}{4a^2}\mathrm{S}_n,$$

ou

$$\frac{a^3}{b^3}=\frac{\mathrm{S}_n}{4\nu}. \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (1)$$

Voici les valeurs de S_n de $n=2$ à $n=6$:

$\mathrm{S}_2=1$, $\mathrm{S}_3=2{\cdot}3094$, $\mathrm{S}_4=3{\cdot}8284$, $\mathrm{S}_5=5{\cdot}5056$, $\mathrm{S}_6=7{\cdot}3094$.

Dans le cas important où $\nu=n$, c'est-à-dire où la charge positive de la sphère est égale à la somme de toutes les charges négatives de l'anneau de corpuscules, on obtient par (1) les valeurs suivantes de a/b :

n.	$\frac{a}{b}$.
2	$\cdot 5$
3	$\cdot 5773$
4	$\cdot 6208$
5	$\cdot 6505$
6	$\cdot 6726$

Si l'anneau de corpuscules, au lieu d'être au repos, tourne avec une vitesse angulaire ω, la condition de mouvement permanent est

$$\frac{\nu e^2 a}{b^3}=ma\omega^2+\frac{e^2}{4a^2}\mathrm{S}_n,$$

ou

$$\frac{\nu a^3}{b^3}=\frac{m}{e^2}\omega^2+\frac{\mathrm{S}_n}{4};$$

m est ici la masse d'un corpuscule.

Nous allons maintenant chercher les forces qui agissent sur un corpuscule lorsque les corpuscules sont légèrement écartés

de leurs positions d'équilibre. Repérons la position des corpuscules par les coordonnées polaires r et θ dans le plan de l'orbite non troublée, et par le déplacement z perpendiculaire à ce plan ; soient r_s, θ_s, z_s les coordonnées du s^e corpuscule ; alors, puisque les corpuscules ne sont que légèrement écartés de leurs positions d'équilibre, $r_s = a + \rho_s$, où ρ_s est petit devant a, z_s est également petit devant a, et $\theta_s - \theta_{s-1} = \frac{2\pi}{n} + \phi_s - \phi_{s-1}$, où n est le nombre de corpuscules et où les ϕ sont de petites quantités.

La répulsion radiale exercée par le s^e corpuscule sur le p^e est égale à

$$-e^2 \frac{d}{dr_p} \frac{1}{(r_p^2 + r_s^2 - 2r_p r_s \cos(\theta_s - \theta_p) + (z_p - z_s)^2)^{1/2}};$$

en développant cette expression et en ne gardant que les premières puissances de ρ, ϕ et z, on trouve, si R_{ps} désigne cette répulsion,

$$\mathrm{R}_{ps} = \frac{e^2}{4a^2 \sin\psi}\left\{1 - \frac{\rho_p}{a}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\sin^2\psi}\right) - \frac{\rho_s}{a}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin^2\psi}\right) - \tfrac{1}{2}(\phi_s - \phi_p)\cot\psi\right\},$$

où $\psi = (p - s)\frac{\pi}{n}$.

La force tangentielle Θ_{ps}, qui tend à augmenter θ_p, est égale à

$$-\frac{e^2}{r_p d\theta_p} \frac{1}{\{r_p^2 + r_s^2 - 2r_p r_s \cos(\theta_s - \theta_p) + (z_p - z_s)^2\}^{1/2}};$$

en développant et en ne gardant que les premières puissances des petites quantités, on obtient

$$\Theta_{ps} = -\frac{e^2}{4a^2}\frac{\cos\psi}{\sin^2\psi}\left\{1 - \frac{3}{2}\frac{\rho_p}{a} - \frac{1}{2}\frac{\rho_s}{a} - (\phi_s - \phi_p)(\cot\psi + \tfrac{1}{2}\tan\psi)\right\}.$$

On voit aisément que Z_{ps}, la force perpendiculaire au plan de l'orbite non troublée, est donnée par l'équation

$$\mathrm{Z}_{ps} = \frac{e^2}{8a^3 \sin^3\psi}(z_p - z_s).$$

La force radiale totale R_p exercée sur le p^e corpuscule par tous les autres corpuscules est égale à

$$\frac{e^2}{4a^2}\,\mathrm{S} - \rho_p \mathrm{A}' - \Sigma\rho_{p+s}\mathrm{A}_{p.p+s} - a\Sigma\phi_{p+s}\mathrm{B}_{p.p+s},$$

où

$$\mathrm{S} = \frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin\dfrac{2\pi}{n}} + \cdots \frac{1}{\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}};$$

$$\mathrm{A}' = \frac{e^2}{4a^3}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin\dfrac{2\pi}{n}} + \cdots \frac{1}{\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}}\right)\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^3\dfrac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^3\dfrac{2\pi}{n}} + \cdots \frac{1}{\sin^3\dfrac{(n-1)\pi}{n}}\right)\right);$$

$$\mathrm{A}_{p.p+s} = \frac{e^2}{8a^3}\left(\frac{1}{\sin\dfrac{s\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^3\dfrac{s\pi}{n}}\right);$$

$$\mathrm{B}_{p.p+s} = \frac{e^3}{8a^3}\frac{\cos\dfrac{s\pi}{n}}{\sin^2\dfrac{s\pi}{n}}.$$

Le coefficient de ϕ_p dans l'expression de R_p est nul, puisque

$$\Sigma\frac{\cos\dfrac{s\pi}{n}}{\sin^2\dfrac{s\pi}{n}} = 0.$$

Comme $\mathrm{A}_{p.p+s}$ et $\mathrm{B}_{p.p+s}$ ne dépendent pas de p, il est plus commode d'employer pour ces quantités les symboles A_s et B_s, et d'écrire

$$\mathrm{R}_p = \frac{e^2}{4a^2}\,\mathrm{S} - \rho_p \mathrm{A}' - \Sigma\rho_{p+s}\mathrm{A}_s - a\Sigma\phi_{p+s}\mathrm{B}_s.$$

La force tangentielle Θ_p qui agit sur la p^{e} particule peut s'écrire de même

$$\Theta_p = \Sigma\rho_{p+s}\mathrm{B}_s - a\phi_p\,\mathrm{C} + a\Sigma\phi_{p+s}\mathrm{C}_s,$$

où

$$\mathrm{C} = \frac{e^2}{4a^3}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\left(\cot\frac{\pi}{n}+\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{n}\right)+\frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}\left(\cot\frac{2\pi}{n}+\frac{1}{2}\tan\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots\right),$$

$$\mathrm{C}_s = \frac{e^2}{4a^3}\frac{\cos\frac{s\pi}{n}}{\sin^2\frac{s\pi}{n}}\left(\cot\frac{s\pi}{n}+\frac{1}{2}\tan\frac{s\pi}{n}\right);$$

tandis que Z_p, la force perpendiculaire au plan de l'orbite, est donnée par l'équation

$$\mathrm{Z}_p = z_p\,\mathrm{D} - \Sigma z_{p+s}\mathrm{D}_s,$$

où

$$\mathrm{D} = \frac{e^2}{8a^3}\left(\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\sin^3\frac{2\pi}{n}}+\cdots\frac{1}{\sin^3\frac{(n-1)\pi}{n}}\right),$$

et

$$\mathrm{D}_s = \frac{e^2}{8a^3}\frac{1}{\sin^3\frac{s\pi}{n}}.$$

Les équations du mouvement du p^{e} corpuscule sont

$$m\left(\frac{d^2r_p}{dt^2}-r_p\left(\frac{d\theta_p}{dt}\right)^2\right) = -\frac{\nu e^2 r_p}{b^3}+\mathrm{R}_p;\quad\ldots\quad(\alpha)$$

$$m\left(r\frac{d^2\theta_p}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta_p}{dt}\right) = \Theta_p;\quad\ldots\ldots\quad(\beta)$$

$$m\frac{d^2z_p}{dt^2} = -\frac{\nu e^2}{b^3}z_p+\mathrm{Z}_p\ldots\ldots\ldots\quad(\gamma)$$

En ne gardant que les premières puissances des petites quantités, on tire de ces équations, si ω est la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ dans le mouvement permanent,

$$\frac{\nu e^2 a}{b^3} = ma\omega^2+\frac{e^2}{4a^2}\,\mathrm{S},$$

$$m\frac{d^2\rho_p}{dt^2}-2ma\omega\frac{d\theta_p}{dt} = \rho_p\left(m\omega^2-\frac{\nu e^2}{b^3}\right)+\mathrm{R}_p-\frac{e^2}{4a^2}\,\mathrm{S}\,.$$

Si ρ_p et θ_p varient comme $e^{\iota qt}$, cette équation peut s'écrire

$$(\mathrm{A}-mq^2)\rho_p+\mathrm{A}_1\rho_{p+1}+\mathrm{A}_2\rho_{p+2}+\ldots$$
$$-2ma\omega\iota q\phi_p+a\mathrm{B}_1\phi_{p+1}+a\mathrm{B}_2\phi_{p+2}+\ldots=0,$$

où

$$\mathrm{A}=\frac{e^2}{4a^3}\ \mathrm{S}+\mathrm{A}'=\frac{e^2}{8a^3}\left\{5\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\sin^3\frac{2\pi}{n}}+\ldots\right)\right\}$$

En donnant à p les valeurs 1, 2, 3, on obtient

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{A}-mq^2)\rho_1+\mathrm{A}_1\rho_2+\mathrm{A}_2\rho_3\ldots+\mathrm{A}_{n-1}\rho_n-2ma\omega\iota q\phi_1+a\mathrm{B}_1\phi_2+a\mathrm{B}_2\phi_3+\ldots=0\\ (\mathrm{A}-mq^2)\rho_2+\mathrm{A}_1\rho_3+\mathrm{A}_2\rho_4+\ldots\ldots\quad -2ma\omega\iota q\phi_2+a\mathrm{B}_1\phi_3+a\mathrm{B}_2\phi_4+\ldots=0\\ (\mathrm{A}-mq^2)\rho_n+\mathrm{A}_1\rho_1+\mathrm{A}_2\rho_2+\ldots\ldots\quad -2ma\omega\iota q\phi_n+a\mathrm{B}_1\phi_1+a\mathrm{B}_2\phi_2+\ldots=0.\end{array}\right\}\text{(A)}$$

D'après l'équation β, on a

$$2m\omega\iota q\frac{\rho_p}{a}-\mathrm{B}_1\frac{\rho_{p+1}}{a}-\mathrm{B}_2\frac{\rho_{p+2}}{a}+\ldots(\mathrm{C}-mq^2)\phi_p-\mathrm{C}_1\phi_{p+1}-\mathrm{C}_2\phi_{p+2}-\ldots=0.$$

En donnant successivement à p les valeurs 1, 2, 3, on obtient

$$\left.\begin{array}{l}2\iota m\omega q\frac{\rho_1}{a}-\mathrm{B}_1\frac{\rho_2}{a}-\mathrm{B}_2\frac{\rho_3}{a}\ldots\quad+(\mathrm{C}-mq^2)\phi_1-\mathrm{C}_1\phi_2-\mathrm{C}_2\phi_3-\ldots=0\\ 2\iota m\omega q\frac{\rho_2}{a}-\mathrm{B}_1\frac{\rho_3}{a}-\mathrm{B}_2\frac{\rho_4}{a}\ldots\quad+(\mathrm{C}-mq^2)\phi_2-\mathrm{C}_2\phi_3-\mathrm{C}_2\phi_4-\ldots=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 2\iota m\omega q\frac{\rho_n}{a}-\mathrm{B}_1\frac{\rho_1}{a}-\mathrm{B}_2\frac{\rho_2}{a}\ldots\quad+(\mathrm{C}-mq^2)\phi_n-\mathrm{C}_1\phi_1-\mathrm{C}_2\phi_2-\ldots=0\end{array}\right\}\text{(B)}$$

Pour résoudre les équations A et B, remarquons que, si ω est une racine quelconque de l'équation $x^n=1$, c'est-à-dire si ω est l'une des racines n^{es} de l'unité, les équations A seront satisfaites par

$$\rho_2=\omega\rho_1,\ \rho_3=\omega\rho_2,\ \rho_4=\omega\rho_3\ldots\quad\phi_2=\omega\phi_1,\ \phi_3=\omega\phi_2,\ \phi_4=\omega\phi_3..$$

pourvu que

$$\begin{array}{c}\rho_1(\mathrm{A}-mq^2+\omega\mathrm{A}_1+\omega^2\mathrm{A}_2+..\omega^{n-1}\mathrm{A}_{n-1})\\ +\phi_1a(-2\iota m\omega q+\omega\mathrm{B}_1+\omega^2\mathrm{B}_2+\omega^{n-1}\mathrm{B}_{n-1})=0;\end{array}\qquad(1)$$

tandis que les équations B seront satisfaites par les mêmes valeurs pourvu que

$$\begin{array}{c}\rho_1(2\iota m\omega q-\omega\mathrm{B}_1-\omega^2\mathrm{B}_2-\omega^{n-1}\mathrm{B}_{n-1})\\ +\phi_1a(\mathrm{C}-mq^2-\omega\mathrm{C}_1-\omega^2\mathrm{C}_2-\omega^{n-1}\mathrm{C}_{n-1})=0.\end{array}\qquad(2)$$

Si donc les deux systèmes d'équations sont satisfaits par ces valeurs, on a, en éliminant ρ_1 et ϕ_1 entre (1) et (2),

$$\begin{array}{c}((\mathrm{A}-mq^2)+\omega\mathrm{A}_1+\omega^2\mathrm{A}_2+..\omega^{n-1}\mathrm{A}_{n-1})\\ (\mathrm{C}-mq^2-\omega\mathrm{C}_1-\omega^2\mathrm{C}_2-\omega^{n-1}\mathrm{C}_{n-1})\\ =-(-2\iota m\omega q+\omega\mathrm{B}_1+\omega^2\mathrm{B}_2+..\omega^{n-1}\mathrm{B}_n)^2,\end{array}\qquad(1)$$

équation bicarrée qui détermine q, la fréquence des oscillations du système. Or ω est de la forme

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+\iota\sin\frac{2k\pi}{n},$$

où k est un entier compris entre 0 et $n-1$. En substituant cette valeur de ω, on trouve

$$\omega\mathrm{A}_1+\omega^2\mathrm{A}_2+\omega^{n-1}\mathrm{A}_{n-1}=\frac{e^2}{8a^3}\left\{\cos\frac{2k\pi}{n}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{n}}\right)\right.$$
$$\left.+\cos\frac{4k\pi}{n}\left(\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}}+\frac{1}{\sin^3\frac{2\pi}{n}}\right)+\cos\frac{6k\pi}{n}\left(\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{n}}+\frac{1}{\sin^3\frac{3\pi}{n}}\right)+\ldots\right\}$$

Nous désignerons cette quantité par L_k ; on remarquera que L_k ne contient pas de termes imaginaires. On trouve aussi que

$$\omega\mathrm{C}_1+\omega^2\mathrm{C}_2+\omega^3\mathrm{C}_3+\omega^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}=\frac{e^2}{4a^3}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\left(\cot\frac{\pi}{n}+\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{n}\right)\right.$$
$$\left.+\cos\frac{4k\pi}{n}\frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}\left(\cot\frac{2\pi}{n}+\frac{1}{2}\tan\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots\right).$$

Nous désignerons cette quantité par N_k.

De même,

$$\omega\mathrm{B}_1+\omega^2\mathrm{B}_2+\omega^{n-1}\mathrm{B}_{n-1}=\frac{\iota.e^2}{8a^3}\left(\sin\frac{2k\pi}{n}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}+\sin\frac{4k\pi}{n}\frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}\right.$$
$$\left.+\sin\frac{6k\pi}{n}\frac{\cos\frac{3\pi}{n}}{\sin^2\frac{3\pi}{n}}+\ldots\right)$$
$$=\iota\mathrm{M}_k,\text{ par exemple.}$$

En substituant ces valeurs, l'équation (1) devient

$$((\mathrm{A}-mq^2)+\mathrm{L}_k)(\mathrm{C}-mq^2-\mathrm{N}_k)=(\mathrm{M}_k-2m\omega q)^2. \quad (2)$$

D'après la valeur de C donnée p. 240, on voit que C est la valeur de N_k pour $k=0$, et peut donc être désigné par N_0, et que $\mathrm{A}=\frac{3}{4}\frac{e^2}{a^3}\,\mathrm{S}-\mathrm{L}_0$; l'équation (2) peut donc s'écrire

$$\left(\frac{3}{4}\frac{e^2}{a^3}\,\mathrm{S}+\mathrm{L}_k-\mathrm{L}_0-mq^2\right)(\mathrm{N}_0-\mathrm{N}_k-mq^2)=(\mathrm{M}_k-2m\omega q)^2. \quad (3)$$

k peut prendre dans cette équation toutes les valeurs de 0 à $(n-1)$; mais on voit que, si l'on écrit $n-k$ au lieu de k, les valeurs de q données par les deux équations ne diffèrent que par le signe, et donnent donc les mêmes fréquences ; on obtient ainsi toutes les valeurs de q en faisant $k = 0, 1, ... \frac{n-1}{2}$ si n est impair, ou $k = 0, 1, \frac{n}{2}$ si n est pair ; si n est impair, il y a donc $\frac{n+1}{2}$ équations du type (3). Pour $k = 0$, $\mathrm{M}_k = 0$, et (3) se réduit à une équation du second degré ; de sorte que le nombre des racines de ces $\frac{n+1}{2}$ équations est $4 \times \frac{n+1}{2} - 2 = 2n$; si n est pair, il y a $\frac{n}{2} + 1$ équations ; mais comme $\mathrm{M}_k = 0$ pour $k = 0$ et $k = \frac{n}{2}$, deux d'entre elles se réduisent au second degré ; de sorte que le nombre des racines de ces équations est $4\left(\frac{n}{2} + 1\right) - 4 = 2n$. Ainsi, dans chaque cas, le nombre des racines est égal à $2n$, nombre des degrés de liberté des corpuscules dans le plan de leur orbite non troublée.

Considérons maintenant le mouvement perpendiculaire à ce plan. D'après l'équation γ, on a

$$m\frac{d^2 z_p}{dt^2} = -\frac{\nu e^2}{b^3} z_p + \mathrm{D}\ z_p - \Sigma \mathrm{D}_s z_{p+s};$$

ou, si z_p est proportionnel à $\varepsilon^{\iota q t}$,

$$z_p \left(\frac{\nu e^2}{b^3} - \mathrm{D} - mq^2 \right) + \Sigma \mathrm{D}_s z_{p+s} = 0;$$

donc

$$\left.\begin{array}{l} z_1\left(\frac{\nu e^2}{b^3} - \mathrm{D} - mq^2\right) + z_2 \mathrm{D}_1 + z_3 \mathrm{D}_2 + ... = 0 \\ z_2\left(\frac{\nu e^2}{b^3} - \mathrm{D} - mq^2\right) + z_3 \mathrm{D}_1 + z_4 \mathrm{D}_2 + ... = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_n\left(\frac{\nu e^2}{b^3} - \mathrm{D} - mq^2\right) + z_1 \mathrm{D}_1 + z_2 \mathrm{D}_2 + ... = 0. \end{array}\right\} \quad . \quad . \qquad \text{(C)}$$

On voit que, ω étant encore l'une des racines n^{es} de l'unité, la solution des équations C est

$$z_2 = \omega z_1, \qquad z_3 = \omega z_2, \qquad z_4 = \omega z_3 ...$$

$$\frac{\nu e^2}{b^3} - \mathrm{D} - mq^2 + \omega \mathrm{D}_1 + \omega^2 \mathrm{D}_2 + \omega^{n-1} \mathrm{D}_{n-1} = 0. \quad . \qquad (4)$$

En posant $\omega = \cos\frac{2k\pi}{n} + \iota \sin\frac{2k\pi}{n}$, on trouve, en substituant les valeurs de D données plus haut,

$$\mathrm{D}_1 + \omega^2\mathrm{D}_2 + \omega^{n-1}\mathrm{D}_{n-1} = \frac{e^2}{8a^3}\left(\frac{\cos\frac{2k\pi}{n}}{\sin^3\frac{\pi}{n}} + \frac{\cos\frac{4k\pi}{n}}{\sin^3\frac{2\pi}{n}} + \frac{\cos\frac{6k\pi}{n}}{\sin^3\frac{3\pi}{n}} + \ldots\right)$$

En désignant cette quantité par P_k et en remarquant que $\mathrm{D} = \mathrm{P}_0$, on trouve que l'équation (4) devient

$$\frac{\nu e}{b^3} + \mathrm{P}_k - \mathrm{P}_0 - mq^2 = 0.$$

En faisant successivement $k = 0, 1, \ldots n-1$, on obtient n valeurs de q, qui donnent les n fréquences correspondant aux déplacements perpendiculaires au plan de l'orbite non troublée.

Nous allons maintenant calculer les fréquences de systèmes contenant divers nombres de corpuscules. Les quatre quantités L_k, M_k, N_k, P_k qui figurent dans l'équation aux fréquences peuvent s'exprimer au moyen de trois quantités S_k, T_k, U_k, où

$$\mathrm{S}_k = \Sigma_1^{n-1} \cos\frac{2ks\pi}{n}\frac{1}{\sin\frac{s\pi}{n}},$$

$$\mathrm{T}_k = \Sigma_1^{n-1} \cos\frac{2ks\pi}{n}\frac{1}{\sin^3\frac{s\pi}{n}},$$

$$\mathrm{U}_k = \Sigma_1^{n-1} \sin\frac{2ks\pi}{n}\frac{\cos\frac{s\pi}{n}}{\sin^2\frac{s\pi}{n}};$$

car on a

$$\mathrm{L}_k = (\mathrm{S}_k + \mathrm{T}_k)\frac{e^2}{8a^3}, \quad \mathrm{N}_k = (2\mathrm{T}_k - \mathrm{S}_k)\frac{e^2}{8a^3},$$

$$\mathrm{M}_k = \mathrm{U}_k\frac{e^2}{8a^3}, \qquad \mathrm{P}_k = \mathrm{T}_k\frac{e^2}{8a^3}.$$

Cas de deux corpuscules.

Pour $n = 2$, on a

$$\mathrm{L}_0 = \frac{2e^2}{8a^3}, \quad \mathrm{M}_0 = 0, \quad \mathrm{N}_0 = \frac{e^2}{8a^3}, \quad \mathrm{P}_0 = \frac{e^2}{8a^3},$$

$$\mathrm{L}_1 = -\frac{2e^2}{8a^3}, \quad \mathrm{M}_1 = 0, \quad \mathrm{N}_1 = -\frac{e^2}{8a^3}, \quad \mathrm{P}_1 = -\frac{e^2}{8a^3}.$$

Pour les vibrations dans le plan de l'orbite, on a donc, pour $k = 0$,

$$\left(\frac{3}{4}\frac{e^2}{a^3} - mq^2\right)(-mq^2) = 4m^2\omega^2q^2;$$

les racines de cette équation sont

$$q = 0, \quad q = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{e^2}{ma^3} + 4\omega^2} = \sqrt{\frac{3\nu e^2}{mb^3} + \omega^2}.$$

Pour $k = 1$, l'équation aux fréquences est

$$\left(\frac{1}{4}\frac{e^2}{a^3} - mq^2\right)^2 = 4m^2\omega^2q^2;$$

les racines de cette équation sont

$$q = \quad \omega \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{e^2}{ma^3} + \omega^2} = \omega \pm \sqrt{\frac{\nu e^2}{mb^3}}$$

et

$$q = -\omega \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{e^2}{ma^3} + \omega^2} = -\omega \pm \sqrt{\frac{\nu e^2}{mb^3}},$$

le second groupe de valeurs ne différant du premier que par le signe.

Pour les vibrations perpendiculaires au plan de l'orbite, on a, pour $k = 0$,

$$q = \sqrt{\frac{\nu e^2}{mb^3}};$$

pour $k = 1$,

$$q = \sqrt{\frac{\nu e^2}{mb^3} - \frac{e^2}{4ma^3}} = \omega.$$

Les six fréquences correspondant aux six degrés de liberté des deux corpuscules sont donc

$$0, \quad \omega, \quad \sqrt{\frac{\nu e}{mb^3}}, \quad \sqrt{\frac{\nu e^2}{mb^3}} - \omega, \quad \sqrt{\frac{\nu e^2}{mb^3}} + \omega, \quad \sqrt{\frac{3\nu e^2}{mb^3} + \omega^2}.$$

Lorsque les corpuscules ne tournent pas sur le cercle, deux de ces racines sont nulles, trois sont égales à $\sqrt{\frac{\nu e^2}{mb^3}}$, et la sixième est égale à $\sqrt{\frac{3\nu e^2}{mb^3}}$. L'effet de la rotation sur la fréquence triple $\sqrt{\nu e^2/mb^3}$ est donc de séparer les racines :

l'une reste inchangée, une autre augmente et la troisième diminue.

Cas de trois corpuscules.

Pour $n = 3$:

$$S_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad T_0 = \frac{16}{3\sqrt{3}}, \quad U_0 = 0, \quad L_0 = \frac{28}{3\sqrt{3}}\frac{e^2}{8a^3},$$

$$N_0 = \frac{20}{3\sqrt{3}}\frac{e^2}{8a^3}, \quad M_0 = 0, \quad P_0 = \frac{16}{3\sqrt{3}}\frac{e^2}{8a^3},$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad T_1 = -\frac{8}{3\sqrt{3}}, \quad U_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad L_1 = -\frac{14}{3\sqrt{3}}\frac{e^2}{8a^3},$$

$$N_1 = -\frac{10}{3\sqrt{3}}\frac{e^2}{8a^3}, \quad M_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{e^2}{8a^3}, \quad P_1 = -\frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{e^2}{8a^3},$$

$$S_2 = S_1, \quad T_2 = T_1, \quad U_2 = -U_1, \quad L_2 = L_1, \quad N_2 = N_1,$$

$$M_2 = -M_1, \quad P_2 = P_1.$$

Pour les vibrations dans le plan de l'orbite, l'équation aux fréquences est, pour $k = 0$,

$$\left(\sqrt{3}\frac{e^2}{a^3} - mq^2\right)(-mq^2) = 4m^2\omega^2q^2;$$

sa solution est

$$q = 0 \quad \text{et} \quad q = \left\{\sqrt{3}\frac{e^2}{ma^3} + 4\omega^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{3\nu e^2}{mb^3} + \omega^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $k = 1$, l'équation aux fréquences est

$$\left(\frac{5}{4\sqrt{3}}\frac{e^2}{a^3} - mq^2\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{e^2}{8a^3} - 2m\omega q\right)^2.$$

Sa solution est

$$q = \quad \omega \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{e^2}{ma^3} + \omega^2} = \omega \pm \sqrt{\frac{\nu e^2}{mb^3}},$$

$$q = -\omega \pm \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^2}{ma^3} + \omega^2} = -\omega \pm \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\nu e^2}{mb^3} - \tfrac{1}{2}\omega^2}.$$

Pour $k = 2$, les fréquences sont les mêmes que pour $k = 1$; nous avons donc six fréquences, correspondant aux six degrés

de liberté des trois corpuscules dans le plan de leur orbite non troublée.

Pour la vibration perpendiculaire au plan de cette orbite, l'équation aux fréquences est, pour $k = 0$,

$$\frac{\nu e^2}{b^3} - mq^2 = 0,$$

ou

$$q = \sqrt{\frac{\nu e^2}{mb^3}}.$$

Pour $k = 1$, l'équation aux fréquences est

$$\frac{\nu e^2}{b^3} - \frac{e^2}{\sqrt{3}a^3} - mq^2 = 0,$$

ou

$$q = \pm\omega.$$

Dans le cas de trois corpuscules, comme dans celui de deux, on voit qu'en l'absence de rotation trois des périodes sont égales ; elles se séparent lorsque les corpuscules sont en rotation.

Cas de quatre corpuscules.

Pour $n = 4$,

$$S_0 = 1 + 2\sqrt{2}, \quad T_0 = 4\sqrt{2} + 1, \quad U_0 = 0, \quad L_0 = \left(6\sqrt{2} + 2\right)\frac{e^2}{8a^3},$$

$$N_0 = \left(6\sqrt{2} + 1\right)\frac{e^2}{8a^3}, \quad M_0 = 0, \quad P_0 = \left(4\sqrt{2} + 1\right)\frac{e^2}{8a^3},$$

$$S_1 = -1, \quad T_1 = -1, \quad U_1 = 2\sqrt{2}, \quad L_1 = -2\frac{e^2}{8a^3},$$

$$N_1 = -\frac{e^2}{8a^3}, \quad M_1 = 2\sqrt{2}\frac{e^2}{8a^3}, \quad P_1 = -\frac{e^2}{8a^3},$$

$$S_2 = -2\sqrt{2} + 1, \quad T_2 = -4\sqrt{2} + 1, \quad U_2 = 0. \quad L_2 = \left(-6\sqrt{2} + 2\right)\frac{e^2}{8a^3},$$

$$N_2 = \left(-6\sqrt{2} + 1\right)\frac{e^2}{8a^3}, \quad M_2 = 0, \quad P_2 = \left(-4\sqrt{2} + 1\right)\frac{e^2}{8a^3}.$$

Pour $k = 0$, l'équation aux fréquences est

$$\left(\frac{3}{4}\frac{e^2}{a^3}\left(1 + 2\sqrt{2}\right) - mq^2\right)(-mq^2) = 4m^2\omega^2q^2;$$

dont la solution est

$$q = 0, \quad q = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{e^2}{a^3}\big(1 + 2\sqrt{2}\big) + 4\omega^2} = \sqrt{\frac{3\nu e^2}{mb^3} + \omega^2}.$$

Pour $k = 1$, l'équation aux fréquences est

$$\left(\big(6\sqrt{2} + 2\big)\frac{e^2}{8a^3} - mq^2\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\frac{e^2}{8a^3} - 2m\omega q\right)^2;$$

dont la solution est

$$q = \quad \omega \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{2}+1}{4}\frac{e^2}{ma^3} + \omega^2} = \quad \omega \pm \sqrt{\frac{\nu e^2}{mb^3}},$$

$$q = -\omega \pm \sqrt{\frac{4\sqrt{2}+1}{4}\frac{e^2}{ma^3} + \omega^2} = -\omega \pm \sqrt{\frac{4\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+1}\frac{\nu e^2}{mb^2} - \frac{2\sqrt{2}\omega^2}{2\sqrt{2}+1}}.$$

Pour $k = 2$, l'équation aux fréquences est

$$\left(\frac{3}{4}\frac{e^2}{a^3} - mq^2\right)\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{e^2}{a^3} - mq^2\right) = 4m^2\omega^2q^2.$$

En la regardant comme une équation du second degré en q^2, on voit que ses racines sont positives, de sorte que les valeurs de q sont réelles et la disposition stable. Les racines de l'équation sont

$$q^2 = \frac{3}{8\sqrt{2}}\big(4 + \sqrt{2}\big)\frac{e^2}{ma^3} + 2\omega^2$$
$$\pm\sqrt{\frac{9\big(4-\sqrt{2}\big)^2}{128}\frac{e^4}{m^2a^6} + \frac{3\big(\sqrt{2}+4\big)}{2\sqrt{2}}\frac{e^2}{ma^3}\omega^2 + 4\omega^4}.$$

Considérons maintenant le mouvement perpendiculaire au plan de l'orbite. Pour $k = 0$, l'équation aux fréquences est

$$\frac{\nu e^2}{b^3} - mq^2 = 0,$$

ou

$$q = \sqrt{\frac{\nu e^2}{mb^3}}.$$

Pour $k = 1$, l'équation aux fréquences est

$$\frac{\nu e^2}{b^3} - \big(4\sqrt{2} + 2\big)\frac{e^2}{8a^3} - mq^2 = 0,$$

ou

$$q = \pm\omega.$$

Pour $k = 2$, l'équation aux fréquences est

$$\frac{\nu e^2}{b^3} - \frac{8\sqrt{2}e^2}{8a^3} - mq^2 = 0,$$

ou

$$q^2 = \frac{8\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+2}\omega^2 - \frac{\left(4\sqrt{2}-2\right)}{4\sqrt{2}+2}\frac{\nu e^2}{mb^3}.$$

Donc, à moins que

$$\omega^2 > \frac{4\sqrt{2}-2}{8\sqrt{2}}\frac{\nu e^2}{mb^3} > \cdot 325\ \frac{\nu e^2}{mb^3}, \quad \ldots\ldots (1)$$

q^2 est négatif, et l'équilibre est instable, les quatre corpuscules se disposant alors au sommet d'un tétraèdre régulier. Mais lorsque ω est assez grand pour satisfaire à la condition (1), quatre corpuscules seront en équilibre lorsqu'ils sont en mouvement permanent dans un même plan, aux sommets d'un carré.

Cas de cinq corpuscules.

Pour $n = 5$, on a

$$\mathrm{S}_0 = 5{\cdot}5056, \quad \mathrm{T}_0 = 12{\cdot}1732, \quad \mathrm{U}_0 = 0, \quad \mathrm{L}_0 = \frac{e^2}{8a^3}(17{\cdot}6788),$$

$$\mathrm{N}_0 = \frac{e}{8a^3}(18{\cdot}8408), \quad \mathrm{M}_0 = 0, \quad \mathrm{P}_0 = \frac{e^2}{8a^3}(12{\cdot}1732),$$

$$\mathrm{S}_1 = -\cdot 65, \quad \mathrm{T}_1 = 1{\cdot}1609, \quad \mathrm{U}_1 = 4{\cdot}856, \quad \mathrm{L}_1 = \frac{e^2}{8a^3}(\cdot 511),$$

$$\mathrm{N}_1 = \frac{e^2}{8a^3}(2{\cdot}9716), \quad \mathrm{M}_1 = \frac{e^2}{8a^3}\ 4{\cdot}856, \quad \mathrm{P}_1 = \frac{e^2}{8a^3}(1{\cdot}1609),$$

$$\mathrm{S}_2 = -\ 2{\cdot}103, \quad \mathrm{T}_1 = -\ 7{\cdot}249, \quad \mathrm{U}_2 = 2{\cdot}103, \quad \mathrm{L}_2 = -\frac{e^2}{8a^3}(9{\cdot}352),$$

$$\mathrm{N}_2 = -\frac{e^2}{8a^3}\ 12{\cdot}4, \quad \mathrm{M}_2 = \frac{e^2}{8a^3}\ 2{\cdot}103, \quad \mathrm{P}_2 = -\frac{e^2}{8a^3}\ 7{\cdot}249\ .$$

L'équation aux fréquences pour $k = 0$ est

$$\left(\frac{3}{4}\,5{\cdot}5056\ \frac{e^2}{a^3} - mq^2\right)(-mq^2) = 4m^2\omega^2q^2,$$

dont la solution est

$$q = 0, \quad q = \sqrt{\frac{3\nu e}{b^3} + \omega^2}.$$

Pour $k = 1$, l'équation aux fréquences est

$$\left(15{\cdot}87\ \frac{e^2}{8a^3} - mq^2\right)^2 = \left(\frac{e^2}{8a^3}\ 4{\cdot}856 - 2m\omega q\right)^2,$$

ou

$$q = \omega \pm \sqrt{10{\cdot}918\ \frac{e^2}{8a^3} + \omega^2} = \omega \pm \sqrt{\frac{\nu e^2}{mb^3}},$$

$$q = -\omega \pm \sqrt{20{\cdot}726\ \frac{e^2}{8a^3} + \omega^2}.$$

Pour $k = 2$,

$$\left(6\frac{e^2}{8a^3} - mq^2\right)\left(31{\cdot}24\ \frac{e^2}{8a^3} - mq^2\right) = \left(2{\cdot}103\ \frac{e^3}{8a^3} - 2m\omega q\right)^2.$$

Par les méthodes habituelles, on trouve que toutes les racines de cette équation sont réelles, de sorte que le mouvement permanent des cinq particules est stable pour les déplacements dans le plan de l'orbite.

Considérons maintenant les déplacements perpendiculaires au plan de l'orbite. Pour $k = 0$, l'équation aux fréquences est

$$\frac{\nu e^2}{b^3} - mq^2 = 0,$$

dont la solution est

$$q = \sqrt{\frac{\nu e^2}{mb^3}}.$$

Pour $k = 1$, l'équation aux fréquences est

$$m\omega^2 - mq^2 = 0,$$

d'où

$$q = \omega.$$

Pour $k = 2$, l'équation aux fréquences est

$$\frac{\nu e^2}{b^3} - 19{\cdot}42\ \frac{e^2}{8a^3} - mq^2 = 0,$$

ou

$$\frac{19{\cdot}42}{11}m\omega^2 + \frac{\nu e^2}{b^3} - \frac{19{\cdot}42}{11}\frac{\nu e^2}{b^3} - mq^2 = 0,$$

$$\frac{19{\cdot}42}{11}m\omega^2 - \frac{8{\cdot}42}{11}\frac{\nu e^2}{b^3} - mq^2 = 0.$$

Donc, pour que l'équilibre soit stable,

$$\omega^2 \text{ doit être} > \frac{8\cdot 42}{19\cdot 42}\frac{\nu e^2}{b^3} > \cdot 433\ \frac{\nu e^2}{mb^3}.$$

Ainsi les cinq corpuscules sont instables dans un même plan, à moins que la vitesse angulaire ne dépasse une certaine valeur ; la disposition est stable, en revanche, lorsque la vitesse angulaire est grande.

Cas de six corpuscules.

Pour $n = 6$,

$$\mathrm{S}_0 = 5 + \frac{4}{\sqrt{3}},\quad \mathrm{T}_0 = 17 + \frac{16}{3\sqrt{3}},\quad \mathrm{U}_0 = 0,\quad \mathrm{L}_0 = \left(22 + \frac{28}{3\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3},$$

$$\mathrm{N}_0 = \left(29 + \frac{20}{3\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3},\quad \mathrm{M}_0 = 0,\quad \mathrm{P}_0 = \left(17 + \frac{16}{3\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3},$$

$$\mathrm{S}_1 = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}},\quad \mathrm{T}_1 = 7 - \frac{8}{3\sqrt{3}},\quad \mathrm{U}_1 = 6 + \frac{2}{\sqrt{3}},\quad \mathrm{L}_1 = \left(8 - \frac{14}{3\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3},$$

$$\mathrm{N}_1 = \left(13 - \frac{10}{3\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3},\quad \mathrm{M}_1 = \left(7 - \frac{8}{3\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3},\quad \mathrm{P}_1 = \left(7 - \frac{8}{3\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3},$$

$$\mathrm{S}_2 = -1 - \frac{2}{\sqrt{3}},\quad \mathrm{T}_2 = -7 - \frac{8}{3\sqrt{3}},\quad \mathrm{U}_2 = 6 - \frac{2}{\sqrt{3}},\quad \mathrm{L}_2 = \left(-8 - \frac{14}{3\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3}$$

$$\mathrm{N}_2 = \left(-13 - \frac{10}{3\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3},\quad \mathrm{M}_2 = \left(6 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3},\quad \mathrm{P}_2 = \left(-7 - \frac{8}{3\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3}$$

$$\mathrm{S}_3 = -5 + \frac{4}{\sqrt{3}},\quad \mathrm{T}_3 = -17 + \frac{16}{3\sqrt{3}},\quad \mathrm{U}_3 = 0,\quad \mathrm{L}_3 = \left(-22 + \frac{28}{3\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3}$$

$$\mathrm{N}_3 = \left(-29 + \frac{20}{3\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3},\quad \mathrm{M}_3 = 0,\quad \mathrm{P}_3 = \left(-17 + \frac{16}{3\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3}.$$

Il n'est pas nécessaire d'écrire toutes les équations aux fréquences car, comme nous allons le montrer, la disposition de six corpuscules est instable. En effet, pour $k = 3$, l'équation aux fréquences est

$$\left(\frac{6}{8}\left(5 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)\frac{e^2}{8a^3} - 44\frac{e^2}{8a^3} - mq^2\right)\left(58\frac{e^2}{8a^3} - mq^2\right) = 4m^2\omega^2q^2,$$

ou

$$\left(-\frac{14 - 8\sqrt{3}}{8}\frac{e^2}{a^3} - mq^2\right)\left(58\frac{e^2}{8a^3} - mq^2\right) = 4m^2\omega^2q^2 : \quad (1)$$

Comme $14 - 8\sqrt{3}$ est positif, on voit que l'une des racines de cette équation en q^2 est négative, de sorte que q est imaginaire ; cela montre que le mouvement permanent de 6 corpuscules en anneau est instable, quelle que soit la rapidité

de la rotation. On peut cependant rendre le mouvement stable en plaçant un corpuscule au centre ; si nous avons au centre de l'anneau une charge négative égale à celle de p corpuscules, la force radiale qu'elle exerce sur le s^e corpuscule est $\dfrac{pe^2}{(a+\rho)^2}$, ou $\dfrac{pe^2}{a^2} - \dfrac{2pe^2\rho}{a^3}$. En introduisant ce terme dans l'expression de la force radiale, on trouve que l'équation aux fréquences devient

$$\left(\frac{3}{4}\frac{e^2}{a^3}\mathrm{S}_0 + \frac{3pe^2}{a^3} + \mathrm{L}_k - \mathrm{L}_0 - mq^2\right)(\mathrm{N}_0 - \mathrm{N}_k - mq^2) = (\mathrm{M}_k - 2m\omega q)^2.$$

En utilisant cette équation aux fréquences et en supposant $p = 1$, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un corpuscule au centre de l'hexagone, on obtient au lieu de (1)

$$\left(\frac{10+8\sqrt{3}}{8}\frac{e^2}{a^3} - mq^2\right)\left(\frac{58e^2}{8a^3} - mq^2\right) = 4m^2\omega^2q^2. \quad (2)$$

Les racines de cette équation en q^2 sont toutes deux positives, de sorte que q est réel et l'équilibre stable.

Étudions maintenant les conditions de stabilité pour les déplacements perpendiculaires au plan de l'orbite.

Pour le mouvement perpendiculaire au plan de l'anneau, l'équation aux fréquences est, pour $k = 3$,

$$\frac{\nu e^2}{b^3} - \frac{pe^2}{a^3} - \frac{34e^2}{8a^3} - mq^2 = 0.$$

Pour que cette équation représente le déplacement d'un système stable, q^2 doit être positif ; de sorte que, si $p = 1$,

$$\frac{\nu e^2}{b^3} - \frac{e^2}{a^3} - \frac{34e^2}{8a^3}$$

doit être positif ; or on a

$$\frac{\nu e^2}{b^3} = m\omega^2 + \frac{e^2}{a^3} + \frac{e^2}{4a^3}\left(5 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right);$$

de sorte que, pour que

$$\frac{\nu e^2}{b^3} - \frac{e^2}{a^3} - \frac{34e^2}{8a^3}$$

soit positif,

$m\omega^2$ doit être supérieur à $\dfrac{12 - 4/\sqrt{3}}{21}\dfrac{\nu e^2}{b^3}$, c.-à-d. $\cdot 46\ \dfrac{\nu e^2}{b^3}$.

Considérons maintenant la stabilité du corpuscule placé au centre de l'anneau : s'il est déplacé d'une distance z per-

pendiculairement à l'anneau, l'équation du mouvement du corpuscule est

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\nu e^2}{b^3}z + \frac{6e^2}{a^3}z.$$

Donc, si le mouvement est stable,

$$\frac{\nu e^2}{b^3} > \frac{6e^2}{a^3},$$

ou

$$m\omega^2 > \frac{15 - 4/\sqrt{3}}{24}\frac{\nu e^2}{b^3}, \text{ c.-à-d. } \cdot 53\ \frac{\nu e^2}{b^3}.$$

Cette valeur de ω^2 est supérieure à celle qu'exige la stabilité de l'anneau pour les déplacements perpendiculaires à son plan ; si le corpuscule central, au lieu d'être dans le plan de l'anneau, se trouvait d'un côté du centre de la sphère d'électrisation positive tandis que l'anneau serait de l'autre, la rotation nécessaire pour rendre stable l'équilibre du corpuscule détaché serait moindre que lorsqu'il est dans le plan de l'anneau ; à l'équilibre, la distance du corpuscule détaché au centre de la sphère doit être six fois la distance de ce point au plan de l'anneau.

Conditions de stabilité des anneaux de plus de six corpuscules.

Je trouve qu'un seul corpuscule au centre suffit à rendre stables des anneaux de 7 et de 8 corpuscules ; dans le second cas, cependant, l'une des valeurs de q^2, quoique positive, est extrêmement petite. Lorsque le nombre des corpuscules dépasse 8, le nombre des corpuscules centraux nécessaires pour assurer la stabilité croît très rapidement avec le nombre des corpuscules de l'anneau.

L'équation aux fréquences est

$$\left(\frac{3}{4}\frac{e^2\mathrm{S}_0}{a^3} + \frac{3pe^2}{a^3} - (\mathrm{L}_0 - \mathrm{L}_k) - mq^2\right)(\mathrm{N}_0 - \mathrm{N}_k - mq^2) = (\mathrm{M}_k - 2m\omega q)^2.$$

Or $\mathrm{N}_0 - \mathrm{N}_k$ est toujours positif et M est petit devant L et N ; cette équation aura donc des racines réelles si

$$\frac{3}{4}\frac{e^2\mathrm{S}_0}{a^3} + \frac{3pe^2}{a^3} - (\mathrm{L}_0 - \mathrm{L}_k)$$

est positif. La plus grande valeur de $\mathrm{L}_0 - \mathrm{L}_k$ s'obtient en faisant $k = n/2$ si n est pair, et $= (n-1)/2$ si n est impair :

la condition pour que les valeurs de q soient réelles, c'est-à-dire pour que l'équilibre de l'anneau soit stable, est donc

$$\frac{3pe^2}{a^3} > \left(\mathrm{L}_0 - \mathrm{L}_{\frac{n}{2}}\right) - \frac{3}{4}\frac{e^2\mathrm{S}_0}{a^3} \quad \text{si } n \text{ est pair,}$$

et

$$\frac{3pe^2}{a^3} > \left(\mathrm{L}_0 - \mathrm{L}_{\frac{n-1}{2}}\right) - \frac{3}{4}\frac{e^2\mathrm{S}_0}{a^3} \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Cette équation permet de calculer la plus petite valeur de p qui rende stable un anneau de n corpuscules. Les valeurs de p pour une série de valeurs de n sont données dans le tableau suivant :

n	...	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40
p	...	0	1	1	1	2	3	15	39	101	232

Pour de grandes valeurs de n, les valeurs de p sont proportionnelles à n^3. Lorsque p est supérieur à un, les corpuscules intérieurs nécessaires à l'équilibre ne peuvent pas tous se trouver au centre de la sphère ; ils se sépareront jusqu'à ce que leurs répulsions soient équilibrées par l'attraction de l'électricité positive de la sphère. Ainsi, lorsqu'il y a deux corpuscules intérieurs, comme pour $n = 9$, ces deux corpuscules se sépareront et formeront un couple dont la ligne de jonction sera parallèle au plan de l'anneau. Si nous admettons, ce qui est approximativement le cas, que le couple de corpuscules égaux exerce aux points extérieurs la même force qu'une charge double placée au milieu de leur intervalle, la théorie précédente s'appliquera, et le système formé de l'anneau de 9 et du couple de corpuscules sera en équilibre stable. Pour $n = 10$, les corpuscules intérieurs doivent être au nombre de trois ; ces trois corpuscules se disposeront aux sommets d'un triangle équilatéral, et le système de 13 corpuscules se composera d'un anneau de 10 et d'un triangle de 3, les plans de l'anneau et du triangle étant parallèles mais non confondus ; tous les corpuscules sont supposés tourner rapidement autour du diamètre de la sphère perpendiculaire aux plans de l'anneau. Pour un anneau de 12 corpuscules, il en faut 7 à l'intérieur ; mais 7 corpuscules, nous l'avons vu, ne peuvent pas former un seul anneau : ils se disposeront en un anneau de 6 avec un corpuscule au centre. Le système de 19 corpuscules se composera donc d'un anneau extérieur de 12, d'un anneau intérieur de 6 situé dans un plan parallèle à l'anneau extérieur, et d'un corpuscule sur l'axe de rotation.

Nous voyons ainsi que, lorsque nous avons un grand nombre de corpuscules en rotation rapide, ils se disposeront comme

suit. Les corpuscules forment une série d'anneaux ; les corpuscules d'un même anneau sont à peu près dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, et le nombre des particules des anneaux diminue avec leur rayon. Si les corpuscules peuvent se déplacer perpendiculairement au plan de leur orbite, les anneaux seront dans des plans différents, qui se régleront de façon que la répulsion entre les anneaux soit équilibrée par l'attraction qu'exerce l'électrisation positive de la sphère dans laquelle ils sont placés. Nous avons donc d'abord une sphère d'électrisation positive uniforme et, à l'intérieur de cette sphère, un certain nombre de corpuscules disposés en une série d'anneaux parallèles, le nombre des corpuscules d'un anneau variant d'un anneau à l'autre : chaque corpuscule parcourt à grande vitesse la circonférence de l'anneau où il se trouve, et les anneaux sont disposés de telle sorte que ceux qui contiennent un grand nombre de corpuscules sont près de la surface de la sphère, tandis que ceux qui en contiennent un plus petit nombre sont plus à l'intérieur.

Si les corpuscules, comme les pôles des petits aimants dans les expériences de Mayer sur les aimants flottants, sont astreints à se mouvoir dans un plan, ils seraient, même sans rotation, en équilibre une fois disposés suivant la série d'anneaux que nous venons de décrire. La rotation est nécessaire pour rendre la disposition stable lorsque les corpuscules peuvent se déplacer perpendiculairement au plan de l'anneau.

Application des résultats précédents à la théorie de la structure de l'atome.

Nous supposons que l'atome se compose d'un certain nombre de corpuscules qui se meuvent dans une sphère d'électrisation positive uniforme : les problèmes à résoudre sont (1) quelle serait la structure d'un tel atome, c'est-à-dire comment les corpuscules se disposeraient-ils dans la sphère ; et (2) quelles propriétés cette structure conférerait-elle à l'atome. La solution de (1), lorsque les corpuscules sont astreints à se mouvoir dans un plan, est indiquée par les résultats que nous venons d'obtenir — les corpuscules se disposeront en une série d'anneaux concentriques. Cette disposition est imposée par le fait qu'un grand nombre de corpuscules ne peut pas être en équilibre stable lorsqu'ils forment un anneau unique, alors qu'on peut rendre cet anneau stable en plaçant à l'intérieur un nombre convenable de corpuscules. Lorsque les corpuscules ne sont pas astreints à un plan, mais peuvent se mouvoir en tous sens, ils se disposeront en une série de couches sphériques concentriques ; on voit facilement en effet que, comme dans le cas de l'anneau, un certain

nombre de corpuscules distribués sur la surface d'une couche ne sera pas en équilibre stable si le nombre des corpuscules est grand, à moins qu'il n'y ait d'autres corpuscules à l'intérieur de la couche, tandis qu'on peut rendre l'équilibre stable en introduisant à l'intérieur de la couche un nombre convenable d'autres corpuscules.

Les difficultés analytiques et géométriques du problème de la distribution des corpuscules lorsqu'ils sont disposés en couches sont beaucoup plus grandes que lorsqu'ils sont disposés en anneaux, et je n'ai pas encore réussi à en obtenir une solution générale. On voit cependant que les couches auront le même genre de propriétés que les anneaux ; et comme notre solution de ce dernier cas permet d'obtenir des résultats précis, je m'en tiendrai à ce cas, et je m'efforcerai de montrer que les propriétés conférées à l'atome par cette structure en anneaux sont analogues à bien des égards à celles que possèdent les atomes des éléments chimiques, et en particulier que les propriétés de l'atome dépendent de son poids atomique d'une manière très analogue à celle qu'exprime la loi périodique.

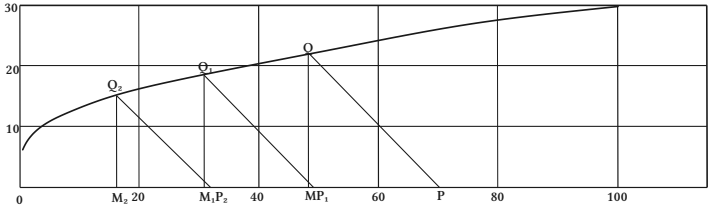
Supposons donc que nous ayons N corpuscules, portant chacun une charge e d'électricité négative, placés dans une sphère d'électrisation positive, la charge totale de la sphère étant égale à Ne ; cherchons la distribution des corpuscules lorsqu'ils sont disposés de la manière que l'on peut considérer comme la plus simple, c'est-à-dire lorsque le nombre des anneaux est minimum, de sorte que chaque anneau contienne à peu près autant de corpuscules que les corpuscules intérieurs peuvent en maintenir en équilibre. Soit $f(n)$ le nombre de corpuscules intérieurs nécessaire pour rendre stable l'équilibre d'un anneau de n corpuscules. La valeur de $f(n)$ pour une série de valeurs de n est donnée dans le tableau de la page 254 ; dans ce tableau, $f(n)$ est désigné par p. Le nombre n_1 des corpuscules de l'anneau extérieur sera alors déterminé par la condition que $N-n_1$, nombre des corpuscules intérieurs, suffise tout juste à maintenir en équilibre l'anneau de n_1 corpuscules, c'est-à-dire que n_1 sera déterminé par l'équation

$$N - n_1 = f(n_1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Si la valeur de n_1 tirée de cette équation n'est pas entière, on prendra la partie entière de cette valeur.

Pour obtenir n_2, nombre des corpuscules du deuxième anneau, remarquons qu'il doit y avoir $N-n_1-n_2$ corpuscules à l'intérieur ; n_2 est donc donné par l'équation

Fig. 1.



$$N - n_1 - n_2 = f(n_2).$$

De même, n_3, n_4, …, nombres des corpuscules des 3e, 4e, etc. anneaux comptés à partir de l'extérieur, sont donnés par

$$N - n_1 - n_2 - n_3 = f(n_3),$$

$$N - n_1 - n_2 - n_3 - n_4 = f(n_4).$$

Ces équations se résolvent très rapidement par une méthode graphique. Traçons la courbe dont l'abscisse $= f(n)$ et dont l'ordonnée est n. Les valeurs de $f(n)$ pour une série de valeurs de n sont données à la page 254; c'est à partir de ces valeurs qu'a été construite la courbe de la fig. 1.

Pour trouver comment se disposera un nombre de corpuscules égal à N, portons sur l'axe des abscisses, à partir de O, une longueur égale à N. Soit OP cette longueur; par P menons PQ inclinée à 135° sur l'axe horizontal, qui coupe la courbe en Q, et menons l'ordonnée QM; la partie entière de QM sera alors la valeur de n_1, nombre des corpuscules du premier anneau compté à partir de l'extérieur. En effet, évidemment,

$$OM = f(QM),$$

et OM=ON−NM; et comme PQ est inclinée à 45° sur l'axe, NM=OM; donc

$$ON - QM = f(QM).$$

En comparant ceci avec l'équation (1), on voit que la partie entière de QM est la valeur de n_1.

Pour obtenir la valeur de n_2, nombre des corpuscules du deuxième anneau, portons l'abscisse $OP_1 = N - n_1$ (si QM est entier, P_1 coïncidera avec M); puis, par P_1, menons P_1Q_1 parallèle à PQ, qui coupe la courbe en Q_1; la partie entière de Q_1M_1 sera la valeur de n_2. Pour obtenir n_3, portons l'abscisse $OP_2 = N - n_1 - n_2$ et menons P_2Q_2 parallèle à PQ; la partie

Nombre de corpuscules	60.	55.	50.	45.	40.	35.
Nombre par anneau.	20 16 13 8 3	19 16 12 7 1	18 15 11 5 1	17 14 10 4	16 13 8 3	16 12 6 1
Nombre de corpuscules	30.	25.	20.	15.	10.	5.
Nombre par anneau.	15 10 5	13 9 3	12 7 1	10 5	8 2	5

entière de Q_2M_2 sera la valeur de n_3. On peut ainsi trouver la configuration en très peu de temps.

Le tableau suivant, qui donne la manière dont se groupent divers nombres de corpuscules, a été calculé de cette façon ; les nombres décroissent à partir de 60 par intervalles de 5.

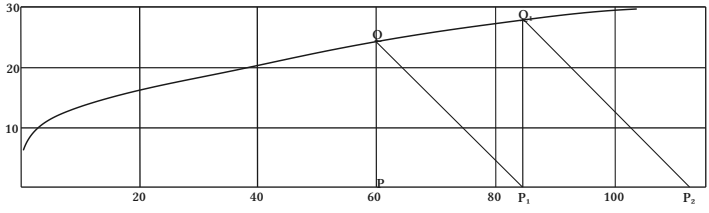
Nous donnons aussi la série complète des dispositions de corpuscules dont l'anneau extérieur se compose de 20 corpuscules.

59 est le plus petit nombre de corpuscules qui puisse avoir un anneau extérieur de 20, tandis que, lorsque le nombre des corpuscules dépasse 67, l'anneau extérieur en contiendra plus de 20.

Considérons maintenant le rapport entre ces résultats et les propriétés que possèdent les atomes des éléments chimiques. Nous supposons que la masse d'un atome est la somme des masses des corpuscules qu'il contient, de sorte que le poids atomique d'un élément se mesure par le nombre des corpuscules de son atome. L'examen des résultats que nous venons de donner montrera que des systèmes formés d'anneaux de corpuscules de la manière que nous avons décrite posséderont des propriétés analogues à certaines de celles de l'atome. En premier lieu, on voit que les diverses dispositions des corpuscules peuvent être classées en familles, la répartition des corpuscules entre les divers membres de la famille ayant en commun certains caractères. Ainsi, par exemple, on voit que

Nombre de corpuscules	59.	60.	61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.
Nombre par anneau.	20 16 13 8 2	20 16 13 8 3	20 16 13 9 3	20 17 13 9 3	20 17 13 10 3	20 17 13 10 4	20 17 14 10 4	20 17 14 10 5	20 17 15 10 5

Fig. 2.



le groupe de 60 corpuscules se compose des mêmes anneaux de corpuscules que le groupe de 40, avec en plus un anneau de 20 corpuscules qui l'entoure, tandis que le groupe de 40 se compose de la même série d'anneaux que le groupe de 24 avec un anneau extérieur de plus, et que 24 est le groupe 11 avec un anneau de plus. Pour prolonger la série vers de plus grands nombres de corpuscules, prenons la courbe $x = f(y)$ lorsque $f(n)$ est le nombre de corpuscules qu'il faut placer à l'intérieur d'un anneau de n corpuscules pour le rendre stable. Soit Q le point de cette courbe qui correspond à 60 corpuscules, c'est-à-dire OP=60 ; menons par Q la droite QP_1 inclinée à 135° sur l'axe des x ; le nombre de corpuscules représenté par OP_1 se disposera alors comme les 60 corpuscules, avec en plus un anneau de Q_1P_1 corpuscules (fig. 2).

Pour trouver le membre suivant de la famille, menons Q_1P_2 parallèle à QP_1, qui coupe l'axe des x en P_2 ; OP_2 représentera alors le nombre des corpuscules du membre suivant de la famille ; et, en continuant de la sorte, on peut trouver les membres successifs. On voit ainsi que l'on peut répartir les divers groupes d'atomes en séries telles que chaque membre d'une série se déduise du membre précédent (c'est-à-dire du membre qui le précède immédiatement par le poids atomique) par l'addition d'un nouvel anneau de corpuscules. On doit s'attendre à ce que les atomes formés par une série de corpuscules de ce genre présentent de nombreuses ressemblances. Prenons par exemple les vibrations des corpuscules ; on peut les diviser en deux groupes : — (1) celles qui proviennent de la rotation des corpuscules sur leurs orbites : si tous les corpuscules d'un atome ont la même vitesse angulaire, la fréquence des vibrations produites par la rotation de l'anneau de corpuscules est proportionnelle au nombre des corpuscules de l'anneau ; on aurait donc dans le spectre de chaque élément de la série une série de fréquences présentant entre elles les mêmes rapports, ces rapports étant ceux des nombres de corpuscules des divers anneaux.

Le second système de vibrations est celui qui provient de la déformation de l'anneau par rapport à sa figure circulaire. Si la distance d'un corpuscule de l'anneau extérieur à un corpuscule de l'ensemble des anneaux intérieurs est grande devant la distance de ce second corpuscule à son plus proche voisin sur son propre anneau, l'effet de l'anneau extérieur de corpuscules sur l'ensemble intérieur des anneaux se bornera à « troubler » les vibrations de ces derniers, sans altérer fondamentalement le caractère de leurs vibrations. Ainsi, pour ces vibrations comme pour celles qui sont dues aux rotations, la suite des fréquences présenterait à peu près les mêmes caractères pour les divers éléments de la série ; il y aurait dans le spectre des groupes correspondants de raies associées. Nous regardons une série d'atomes formés de cette manière, c'est-à-dire où l'atome du p^e membre se forme à partir de celui du $(p-1)^e$ par l'addition d'un seul anneau de corpuscules, comme appartenant à des éléments d'un même groupe dans la classification des éléments selon la loi périodique ; autrement dit, ils forment une série qui, rangée selon le tableau de Mendeleïev, se trouverait tout entière dans une même colonne verticale.

Le changement progressif des propriétés des éléments que l'on observe en parcourant l'une des lignes horizontales du tableau de Mendeleïev est également illustré par les propriétés de ces groupes de corpuscules. Considérons ainsi la série des dispositions de corpuscules donnée p. 258, dans laquelle l'anneau extérieur contient toujours 20 corpuscules. Un anneau extérieur de 20 corpuscules apparaît pour la première fois avec 59 corpuscules ; dans ce cas, le nombre des corpuscules intérieurs suffit tout juste à rendre stable l'anneau extérieur ; cet anneau sera donc à la limite de l'instabilité, et lorsque les corpuscules de cet anneau seront déplacés, les forces de rappel qui les ramènent à leur position initiale seront faibles. Ainsi, lorsque cet anneau est soumis à des perturbations d'origine extérieure, un ou plusieurs corpuscules peuvent aisément en être détachés ; un tel atome perdra donc facilement un corpuscule électrisé négativement, et prendra ainsi une charge d'électricité positive ; un tel atome se comporterait comme l'atome d'un élément fortement électropositif. Quand on passe de 59 à 60 corpuscules, l'anneau extérieur est plus stable, parce qu'il y a un corpuscule de plus à l'intérieur ; l'atome correspondant sera donc moins électropositif que celui qui ne contient que 59 corpuscules. L'addition de chaque nouveau corpuscule rendra plus difficile le détachement de corpuscules de l'anneau extérieur, et rendra donc l'atome moins électropositif. Lorsque la stabilité

de l'anneau extérieur devient très grande, il peut être possible qu'un ou plusieurs corpuscules se trouvent à la surface de l'atome sans rompre l'anneau ; dans ce cas l'atome pourrait recevoir une charge d'électricité négative, et se comporterait comme l'atome d'un élément électronégatif. L'accroissement de la stabilité de l'anneau, et par suite du caractère électronégatif de l'atome, se poursuivrait jusqu'à ce que nous ayons jusqu'à 67 corpuscules, où la stabilité de l'anneau extérieur serait maximum. Un grand changement dans les propriétés de l'atome se produirait avec 68 corpuscules, car le nombre des corpuscules de l'anneau extérieur passe alors à 21 ; ces 21 corpuscules ne sont cependant que tout juste stables et, comme l'anneau extérieur de 20 dans la disposition des 59 corpuscules, ils perdraient facilement un corpuscule, rendant ainsi l'atome fortement électropositif.

Les propriétés des groupes de 59 et de 67 corpuscules, qui se trouvent respectivement au début et à la fin de la série dont l'anneau extérieur compte 20 corpuscules, méritent une attention particulière. La disposition des corpuscules dans le groupe de 59, bien que très proche de la limite d'instabilité, et donc très exposée à perdre un corpuscule et à prendre ainsi une charge positive, ne pourrait pas conserver cette charge. En effet, après avoir perdu un corpuscule, les 58 corpuscules restants se disposeraient selon le groupement qui correspond à 58 corpuscules, le dernier qui ait un anneau extérieur de 19 corpuscules ; cet anneau est donc extrêmement stable, de sorte qu'aucun autre corpuscule ne s'en échapperait, tandis que la charge positive due au départ du 59^{e} corpuscule attirerait les corpuscules environnants. Cette disposition ne pourrait donc pas rester durablement chargée ; car, dès qu'un corpuscule se serait échappé, il serait remplacé par un autre. Un atome ainsi constitué ne serait ni électropositif ni électronégatif, mais incapable de recevoir durablement une charge d'électricité.

Le groupe de 60 corpuscules serait le plus électropositif de la série ; mais il ne pourrait perdre qu'un corpuscule, c'est-à-dire prendre une charge d'une unité d'électricité positive ; car s'il en perdait deux, nous aurions 58 corpuscules — comme lorsque le groupe de 59 a perdu un corpuscule — et dans ce cas le système serait encore plus enclin que l'autre à attirer des corpuscules extérieurs, puisqu'il aurait une charge de deux unités d'électricité positive au lieu d'une. Ainsi le système de 60 corpuscules se chargerait d'une, mais d'une seule, unité d'électricité positive : il se comporterait donc comme l'atome d'un élément électropositif monovalent.

Le groupe de 61 corpuscules ne céderait pas ses corpuscules aussi facilement que le groupe de 60, mais il pourrait en

revanche en perdre deux, puisque ce n'est qu'après en avoir perdu trois que ses corpuscules se réduisent à 58, nombre à partir duquel, nous l'avons vu, il commence à acquérir de nouveaux corpuscules. Ce système pourrait donc se charger de deux unités d'électricité positive, et se comporterait comme l'atome d'un élément électropositif divalent. De même, le groupe de 62, quoique encore moins enclin que le groupe de 61 à perdre ses corpuscules, pourrait en revanche en perdre 3 sans commencer à en récupérer ; il pourrait ainsi prendre une charge de 3 unités d'électricité positive, et se comporterait comme l'atome d'un élément électropositif trivalent.

Passons maintenant aux groupes de l'autre extrémité de la série et considérons les propriétés du dernier de la série, le groupe de 67 corpuscules. L'anneau extérieur serait très stable, mais si le système acquérait un corpuscule de plus, les 68 corpuscules se disposeraient avec un anneau extérieur de 21 corpuscules ; comme 68 est le plus petit nombre de corpuscules ayant un anneau extérieur de 21, l'anneau est presque instable et perd facilement un corpuscule. Ainsi le groupe de 67 corpuscules, dès qu'il acquiert une charge négative, la perdrait de nouveau, et le système, comme le groupe de 59, serait incapable d'être chargé durablement d'électricité — il se comporterait comme l'atome d'un élément sans valence.

Le groupe de 66 serait le plus électronégatif de la série, mais il ne pourrait conserver qu'une charge d'une unité d'électricité négative ; car s'il en acquérait 2 unités, il aurait 68 corpuscules, disposition qui, nous l'avons vu, perd rapidement ses corpuscules. Ce groupe de 66 se comporterait donc comme l'atome d'un élément électronégatif monovalent.

Le groupe de 65 serait moins enclin que celui de 66 à acquérir des corpuscules négatifs, mais il pourrait en revanche, dans des circonstances favorables, en conserver 2, se charger ainsi de 2 unités d'électricité négative, et se comporter comme l'atome d'un élément électronégatif divalent. De même, le groupe de 64 se comporterait comme l'atome d'un élément électronégatif trivalent, et ainsi de suite.

Ainsi, si nous considérons la série des dispositions de corpuscules qui ont à l'extérieur un anneau contenant un nombre constant de corpuscules, nous avons au début et à la fin des systèmes qui se comportent comme les atomes d'un élément dont les atomes sont incapables de conserver une charge d'électricité positive ou négative ; puis (en suivant l'ordre des nombres croissants de corpuscules) nous avons d'abord un système qui se comporte comme l'atome d'un élément électropositif monovalent, puis un qui se comporte comme l'atome d'un élément électropositif divalent, tandis qu'à l'autre extrémité de la série nous avons un système

qui se comporte comme un atome sans valence, précédé immédiatement d'un système qui se comporte comme l'atome d'un élément électronégatif monovalent, lui-même précédé d'un système qui se comporte comme l'atome d'un élément électronégatif divalent.

Cette suite de propriétés ressemble beaucoup à celle que l'on observe dans le cas des atomes des éléments.

Nous avons ainsi la série d'éléments :

He	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne.
Ne	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Arg.

Le premier et le dernier élément de chacune de ces séries n'ont pas de valence, le deuxième est un élément électropositif monovalent, l'avant-dernier un élément électronégatif monovalent, le troisième un élément électropositif divalent, l'antépénultième un élément électronégatif divalent, et ainsi de suite.

Lorsque des atomes semblables aux électronégatifs, dans lesquels les corpuscules sont très stables, sont mêlés à des atomes semblables aux électropositifs, dans lesquels les corpuscules sont beaucoup moins fortement retenus, les forces auxquelles les corpuscules sont soumis par l'action mutuelle des atomes peuvent entraîner le détachement de corpuscules des atomes électropositifs et leur passage aux électronégatifs. Les atomes électronégatifs prendront ainsi une charge d'électricité négative, les atomes électropositifs une charge positive ; les atomes de charges contraires s'attireront, et il se formera un composé chimique des atomes électropositifs et électronégatifs.

De même qu'une sphère conductrice non chargée attire par induction électrostatique un corpuscule placé dans son voisinage, un corpuscule situé hors d'un atome sera attiré, même si l'atome n'a pas pris de charge positive en perdant un corpuscule. Lorsque le corpuscule extérieur est entraîné dans l'atome, il y a diminution de l'énergie potentielle, cette diminution dépendant du nombre des corpuscules de l'atome. Si nous avons maintenant un atome A tel que la perte d'énergie potentielle due à la chute dans l'atome d'un corpuscule venu de l'extérieur soit supérieure au travail nécessaire pour arracher un corpuscule à un atome B d'une autre espèce, un mélange intime d'atomes A et B aura pour effet que les atomes A arracheront des corpuscules aux atomes B ; les atomes A s'électriseront donc négativement, les atomes B positivement, et les atomes de charges contraires se combineront, formant un composé tel que $A_{-}B_{+}$; dans un tel cas, on peut s'attendre à une combinaison chimique toutes les fois

que les atomes sont mis en contact. Même lorsque la perte d'énergie potentielle due à la chute d'un corpuscule dans A est inférieure au travail nécessaire pour arracher complètement un corpuscule à B, la présence d'un milieu physique convenable peut conduire à une combinaison chimique entre A et B. En effet, lorsqu'un corpuscule est arraché à un atome et éloigné de lui, une partie considérable du travail est dépensée sur le corpuscule après qu'il a quitté l'atome, tandis que, du travail gagné lorsqu'un corpuscule tombe dans un atome, la proportion fournie à l'extérieur par rapport à celle qui l'est à l'intérieur de l'atome est plus faible que la proportion correspondante lorsque le corpuscule est arraché à un atome. Ainsi, bien que le travail nécessaire pour porter un corpuscule de B à une distance infinie puisse être supérieur à celui que l'on gagne lorsqu'un corpuscule passe d'une distance infinie dans A, le travail gagné lorsqu'un corpuscule va de la surface de A à son intérieur pourrait être supérieur au travail nécessaire pour porter un corpuscule de l'intérieur de B à sa surface. Dans ce cas, tout ce qui diminuerait les forces agissant sur les corpuscules une fois sortis de l'atome, par exemple la présence d'un milieu de grand pouvoir inducteur spécifique comme l'eau, ou le contact d'un métal comme le noir de platine, augmenterait fortement les chances de combinaison chimique.

Existence de groupes secondaires de corpuscules à l'intérieur de l'atome.

L'expression donnée p. 238 pour le rayon d'un anneau de corpuscules montre qu'il dépend de $\nu e/b^3$, où νe est la quantité d'électrisation positive contenue dans une sphère de rayon b: ainsi $\nu e/b^3$ est égal à $\frac{4\pi}{3}\rho$, où ρ est la densité de l'électrisation positive de la sphère: par conséquent, si la densité de l'électrisation reste constante, le rayon de l'anneau sera indépendant de la grandeur de la sphère. Prenons maintenant une grande sphère et plaçons à l'intérieur un anneau d'une grandeur telle que l'anneau serait en équilibre stable si son centre était au centre de la sphère. Pour fixer les idées, prenons le cas de trois corpuscules aux sommets d'un triangle équilatéral, et plaçons ce triangle de sorte que son centre O′ ne soit plus au centre de la sphère: on voit facilement que les corpuscules resteront aux sommets d'un triangle équilatéral de même grandeur, et que le triangle se déplacera comme un corps rigide soumis à une force proportionnelle à la distance de son centre à O, centre de la sphère. Pour le démontrer, remarquons que la répulsion entre les corpuscules est la même

que lorsque le centre du triangle est en O. L'attraction de la sphère sur un corpuscule P est proportionnelle à OP, et peut donc se décomposer en deux forces, l'une proportionnelle à O′P et dirigée suivant PO′ (O′ est le centre du triangle), l'autre proportionnelle à OO′ et dirigée suivant O′O. Or les corpuscules sont par hypothèse en équilibre sous l'effet de leurs répulsions mutuelles et de l'attraction vers le centre proportionnelle à O′P : la position relative des corpuscules restera donc inchangée, et le système des trois corpuscules se déplacera comme un corps rigide sous l'action d'une force centrale appliquée à son centre de gravité et proportionnelle à la distance de ce point au centre de la sphère.

Les trois corpuscules produiront, en un point dont la distance à leur centre est grande devant un côté du triangle, le même effet que si les charges des trois corpuscules étaient condensées au centre du triangle ; en de tels points, ils agiront donc comme une unité, et les résultats obtenus plus haut pour des corpuscules isolés pourront être étendus au cas où les corpuscules isolés sont remplacés par des anneaux de corpuscules qui seraient par eux-mêmes en équilibre. Il faut remarquer que l'atome dans lequel sont placés ces systèmes doit être assez grand pour permettre à ces anneaux de corpuscules — on peut les appeler des sous-atomes — d'être séparés par des distances notablement supérieures à la distance des corpuscules d'un même anneau.

Si nous regardons les atomes des éléments plus lourds comme produits par la coalescence d'atomes plus légers, il est raisonnable de supposer que, dans les atomes plus lourds, les corpuscules peuvent être disposés en groupes secondaires ou sous-atomes, chacun de ces groupes agissant comme une unité. Lorsque les corpuscules sont ainsi réunis en faisceaux, il est possible d'obtenir la stabilité lorsque ces faisceaux sont disposés en anneau avec un plus petit nombre de corpuscules à l'intérieur que lorsque les corpuscules des faisceaux sont disposés à intervalles égaux sur la circonférence de l'anneau. Prenons ainsi le cas d'un anneau de 30 corpuscules ; s'ils étaient disposés à intervalles égaux, il faudrait 101 corpuscules à l'intérieur de l'anneau pour le rendre stable. Si en revanche les 30 corpuscules étaient groupés en dix ensembles de trois, il ne faudrait que $3 \times 3 = 9$ corpuscules à l'intérieur pour rendre la disposition stable.

Constitution de l'atome d'un élément radioactif.

Notre étude de la stabilité des systèmes de corpuscules nous a fait connaître des systèmes qui sont stables lorsque les corpuscules tournent avec une vitesse angulaire supérieure à

une certaine valeur, mais qui deviennent instables lorsque la vitesse tombe au-dessous de cette valeur. Ainsi, pour prendre un exemple, nous avons vu (p. 249) que quatre corpuscules peuvent être stables dans un même plan, aux sommets d'un carré, s'ils tournent avec une vitesse angulaire supérieure à $\cdot 325\ \nu e^2/mb^3$, mais deviennent instables si la vitesse tombe au-dessous de cette valeur, les corpuscules tendant dans ce cas à se placer aux sommets d'un tétraèdre. Considérons maintenant les propriétés d'un atome contenant un système de corpuscules de ce genre ; supposons que les corpuscules se meuvent d'abord avec des vitesses très supérieures à la vitesse critique ; par suite du rayonnement des corpuscules en mouvement, leurs vitesses diminueront lentement — très lentement ; lorsque, au bout d'un long intervalle, la vitesse atteint la vitesse critique, il se produira l'équivalent d'une explosion des corpuscules : ceux-ci s'éloigneront beaucoup de leurs positions primitives, leur énergie potentielle diminuera, tandis que leur énergie cinétique augmentera. L'énergie cinétique ainsi gagnée pourrait suffire à projeter le système hors de l'atome, et nous aurions, comme dans le cas du radium, une partie de l'atome expulsée. Du fait de la très lente dissipation de l'énergie par rayonnement, la vie de l'atome serait très longue. Nous avons pris le cas des quatre corpuscules comme type d'un système qui, comme une toupie, a besoin pour être stable d'une certaine quantité de rotation. Tout système possédant cette propriété donnerait à l'atome qui le contient, par suite de la dissipation progressive de l'énergie par rayonnement, des propriétés radioactives semblables à celles que lui confèrent les quatre corpuscules.